Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2018/2019 учебный год

Полное и правильное решение оценивается:

задача №1 – 10 баллов,

задача №2 – 20 баллов,

задача №3 – 30 баллов,

задача №4 – 40 баллов.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2018/2019 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *Игровой набор состоит из кубика и двух монеток. На гранях кубика написаны числа 0, 3, 6, 9, 12, 15, а на сторонах одной из монеток – числа 1 и 10. Известно, что при подбрасывании кубика и обеих монеток сумма выпавших чисел всегда кратна трем. Какие числа могут быть написаны на сторонах второй монетки?*

а) 5 и 8; б) 2 и 4; в) 0 и 1; г) 2 и 11; д) среди указанных ответов нет верного.

Ответ: а) и г).

Решение: Заметим, что все числа на кубике делятся на 3, следовательно, чтобы сумма трех выпавших чисел всегда была кратна трем, необходимо, чтобы была всегда кратна трем сумма выпавших чисел на монетках. Оба числа на одной монетке имеют остаток 1 при делении на 3. Поэтому, чтобы в сумме с числами на второй монетке всегда получалось число, кратное трем, оба числа на второй монетке должны иметь остаток 2 при делении на 3.

2. (10 баллов) *Известно, что a и b простые числа, большие 3. Какие из перечисленных утверждений являются верными?*

а) Число $a^2 - b^2$ делится на 2.
б) Число $a^2 - b^2$ делится на 9.
в) Число $a^2 - b^2$ делится на 12.
г) Среди перечисленных ответов нет верного.

Ответ: а) и в).

Решение: Воспользуемся формулой $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Поскольку a и b простые и большие 3, то они оба нечетные, следовательно, и их разность, и их сумма будет четной. Таким образом, произведение их разности на их сумму будет делиться на 2 (более того, оно будет делиться и на 4). Поэтому ответ а) верен.

Рассмотрим теперь остатки a и b при делении на 3. Если они имеют одинаковые остатки (1 или 2; остаток 0 быть не может, так как эти числа простые большие 3), то их разность будет кратна трем, в то время как их сумма — не будет. Если же числа имеют разные остатки, то, наоборот, их сумма будет кратна трем, а разность — не будет. Таким образом, произведение разности чисел на их сумму всегда будет делиться на 3 (и, следовательно, на 12 — так как всегда делится и на 4), но не обязательно будет делиться на 9 (например, если $a = 7$, а $b = 5$, то $a^2 - b^2 = 24$ — не делится на 9).

3. (20 баллов) *Игрок может ходить по клеточному полю только влево или вверх. За ход на одну клетку влево игроку начисляется 2 очка, за ход на одну клетку вверх – 5 очков. Какое максимальное количество очков может получить игрок при перемещении в клетку, находящуюся на 7 клеток левее и на 3 клетки выше его текущей позиции?*

Ответ: 29 очков.

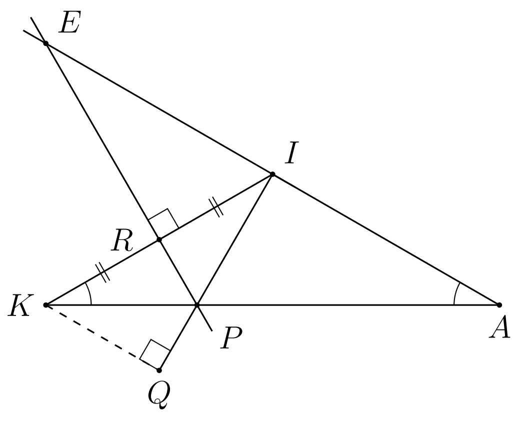
Решение: Отметим два факта: 1) количество очков зависит только от одного сделанного хода (т. е. не зависит от того, какими были предыдущие ходы); 2) игрок не умеет возвращаться «назад», т. к. невозможны ходы вправо или вниз. Из первого факта следует, что не имеет значения, в какой последовательности совершать ходы. Из второго – что игроку нельзя зайти дальше, чем на 7 ходов влево и на 3 хода вверх. Таким образом, игрок должен совершить ровно 7 ходов влево (и получить за них 14 очков) и 3 хода вверх (и получить за них 15 очков), то бишь всего игрок получит $14 + 15 = 29$ очков, при любом маршруте из текущей позиции в заданную.

4. (20 баллов) *В групповом этапе чемпионата области по футболу играют 5 команд по системе каждая с каждой. За победу присуждается 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Команды показали следующие результаты: 9, 8, 5, 5, 0 очков. Сколько игр было сыграно в ничью?*

Ответ: 3.

Решение: Всего было сыграно $(5 \cdot 4)/2 = 10$ матчей, следовательно, наибольшая возможная сумма очков всех команд равна 30 (если бы все матчи заканчивались победой одной из команд). Команды набрали $9+8+5+5+0 = 27$ очков. Ничья дает участникам матча по 1 очку, следовательно, потеря $30 - 27 = 3$ очков от наибольшей возможной суммы соответствует трем матчам, сыгранным вничью.

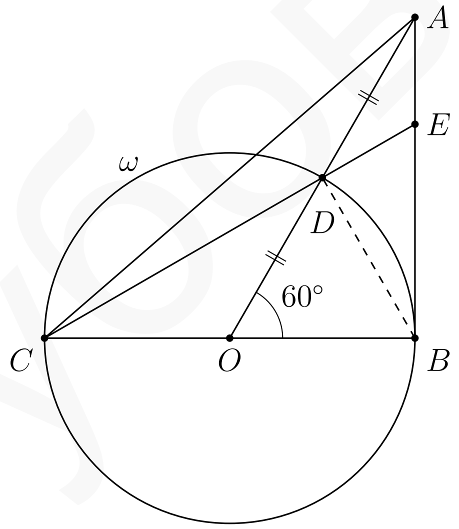
5. (30 баллов) *KIA — равнобедренный треугольник с основанием KA и углами при основании 30°. Точка R делит сторону KI пополам. Точка Q — симметричная R относительно основания треугольника. P — пересечение IQ и KA. E — пересечение прямых PR и IA. Докажите, что $RE = IQ$.*



Решение: Поскольку точка Q симметрична точке R относительно KA, то угол QKA равен углу AKI и составляет $30°$. Также из симметричности следует, что $KR = KQ$. Следовательно, в треугольнике KIQ угол K равен $60°$ $(30° + 30°)$, а сторона KQ в два раза меньше стороны KI. Получаем, что треугольник KQI — прямоугольный с прямым углом Q (а угол I в нем равен $30°$). Отсюда имеем, что треугольник KPI — равнобедренный (углы K и I в нем равны $30°$). Поскольку R — середина KI, то медиана PR является также и высотой. Т. е. треугольник REI, как и треугольник KQI, на самом деле прямоугольный (с прямым углом R). Причем катеты KQ и RI этих треугольников равны. Осталось заметить, что угол RIE — внешний для треугольника KIA, и, следовательно, равен сумме углов IKA и KAI, т е. $60°$. Получаем, что треугольники KQI и REI равны. Соответственно равны IQ и RE.

6. (30 баллов) *В треугольнике ABC на стороне $BC = 7$ как на диаметре построена окружность ω. Сторона AB видна из центра ω под углом $60°$. Медиана треугольника, проведенная из точки A, пересекает ω в точке D. Прямая CD пересекает сторону AB в точке E. Найдите периметр треугольника ADE, если точка D оказалась серединой медианы.*

Ответ: $7/2 + 7\sqrt{3}/3$.



Решение: Соединим вершину A треугольника с центром O окружности ω – это и есть медиана из условия задачи. Треугольник BOD равносторонний, $\angle BDC = 90°$ как опирающийся на диаметр, тогда $\angle OCD = \angle ODC = 30° = \angle EDA$. Заметим, что $\angle ABC = 90°$, так как $AD = DO = BD$. Тогда $\angle BAO = 30°$ и треугольник ADE оказался равнобедренным. Осталось посчитать периметр: $AD = 7/2$, $ED = EA = = 7\sqrt{3}/6$, $P_{ADE} = 7/2 + 7\sqrt{3}/3$.

7. (40 баллов) *В алфавите племени Мамба-Ямба имеется 8 букв: 2 звонких, 3 глухих и 3 нейтральных. Словом в языке этого племени называется последовательность различных букв такая, что в ней а) первая и последняя буквы имеют разную звонкость (т.е. не являются обе звонкими, обе глухими или обе нейтральными); б) глухая буква* *может быть только последней. Песней называется последовательность различных слов такая, что каждое последующее слово начинается с той буквы, на которую закончилось предыдущее слово. Сколько слов в самой длинной песне, состоящей только из трехбуквенных слов?*

Ответ: 37.

Решение: Заметим, что в песне мы можем использовать только одно слово с глухой буквой и это слово будет последним словом нашей песни (за словом, оканчивающимся на глухую буквы, не может в песне следовать никакое другое). Таким образом, наш ответ будет не больше, чем 1+количество трехбуквенных слов из звонких и нейтральных букв. Т. е. количество слов в искомой песне — конечно.

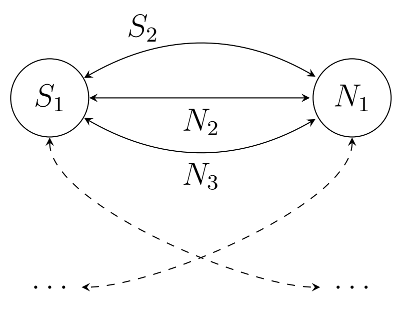
Найдем количество всех трехбуквенных слов из звонких и нейтральных букв и покажем, что все они могут быть использованы в песне. Наши слова могут быть следующих видов:

А) содержащие 2 звонких и одну нейтральную буквы: S_iS_jN и «обратное» ему NS_iS_j;

Б) содержащие одну звонкую и 2 нейтральных буквы: SN_iN_j и «обратное» ему N_iN_jS, где $i \neq j$ (S — любая звонкая буква, S_i, S_j — две разных звонких буквы; с нейтральными аналогично).

Количество слов каждого типа: $2 \cdot (2-1) \cdot 3 = 6$ (плюс 6 «обратных») и $2 \cdot (3-1) \cdot 3 = 12$ (плюс 12 «обратных»), т. е. всего имеется 36 слов. Чтобы показать, как в песне перечислить все 36 слов, промоделируем наши слова следующим образом: будем рассматривать двудольных граф, вершины первой доли которого моделируют звонкие буквы, являющиеся конечными (первыми или последними) буквами трехбуквенных слов, а вершины второй доли — конечными нейтральными буквами слов (также первыми или последними; однако, поскольку нам необходимо исследовать трехбуквенные слова, то ориентированные ребра (моделирующие «направление» слова, т. е. начальная вершина ребра — первая буква слова, конечная — последняя) между первой и второй долями графа будут «множественными» в соответствии с тем, какая буква является в слове средней.

Пример.



Между вершинами S_1 и N_1 будут следующие ребра: проходящие через S_2 (в обе стороны, это ребра, моделирующие слова типа А) — их два; и проходящие через N_2 или через

N_3 (также в обе стороны, это ребра, моделирующие слова типа Б) — их, очевидно, 4; т. е. всего между S_1 и N_1 будет 6 ориентированных ребер. Аналогично, между любой S_i и любой N_i будет по 6 ребер (т. е. мы действительно смоделировали все 36 трехбуквенных слова, состоящих из звонких и нейтральных букв). Поскольку для каждой вершины графа количество входящих ребер равно количеству исходящих, то в нем существует эйлеров цикл, т. е. можно обойти все ребра графа, т. е. можно перечислить все трехбуквенные слова. А поскольку при обходе графа за ребром, оканчивающемся в вершине v, следует ребро, начинающееся в этой вершине, то перечисление слов, соответствующее обходу графа, действительно будет песней.

8. (40 баллов) *Какие числа являются делителями числа* $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ *при всех натуральных* $n \geqslant 2$*?*

Ответ: 1, 3 и 9.

Решение: Преобразуем заданное число: $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n^3+6n = 3n(n^2+2)$. При $n=2$ имеем $1^3+2^3+3^3=36$; при $n=3$ имеем $2^3+3^3+4^3=99$, следовательно, делителями заданного числа при всех n не могут никакие другие числа, кроме как 1, 3 и 9. Делимость заданного числа на 3 очевидна из возможности его представления в виде $3n(n^2+2)$. Докажем теперь, что $n(n^2+2)$ делится на 3 при всех значениях n, и тем самым докажем делимость заданного числа на 9. Если n делится на 3, то произведение $n(n^2+2)$ тоже делится на 3. Если n не делится на 3, то n^2 при делении на 3 имеет остаток 1, и тогда сумма n^2+2, а значит и $n(n^2+2)$, делится на 3.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2018/2019 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Игровой набор состоит из гексаэдра, тетраэдра и монетки. На гранях гексаэдра написаны числа -3, 0, 3, 6, 12, 15; на сторонах третраэдра — числа 1, 4, 10, 13, а на сторонах монетки — числа 5 и 8. Какова вероятность того, что произведение сумм выпавших чисел при двух подбрасываниях будет кратно девяти?*

а) 0; б) 1/6; в) 1/2; г) 1; д) другой ответ.

Ответ: г).

Решение: Легко видеть, что все числа на гранях гексаэдра имеют остаток 0 при делении на 3, все числа на сторонах тетраэдра — остаток 1, а оба числа на сторонах монетки — остаток 2. Таким образом, сумма выпавших чисел всегда будет иметь остаток 0 при делении на 3. Следовательно, произведение двух сумм выпавших чисел — всегда будет иметь остаток 0 при делении на 9, т. е. с вероятностью 1 произведение двух сумм кратно десяти.

2. (10 баллов) *Какие из перечисленных утверждений являются верными?*

а) Произвольную трапецию всегда можно вписать в окружность.
б) Равнобедренную трапецию всегда можно вписать в окружность.
в) Трапецию можно вписать в окружность, если ее средняя линия равна полусумме боковых сторон.
г) Среди перечисленных ответов нет верного.

Ответ: б).

Решение: Проанализируем каждое из утверждений.

Если бы было верным утверждение «а», то это бы означало, что у любой трапеции суммы противоположных углов всегда равны 180°. Однако, для, например, прямоугольной трапеции это неверно.

В равнобедренной трапеции суммы противоположных углов всегда равны и, следовательно, составляют по 180°, таким образом, равнобедренная трапеция всегда является вписанным четырехугольником и утверждение «б» верно.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ следующего вида: основание $AD = 6$, основание $BC = 3$; боковые стороны $AB = 4$, $CD = 5$; $\angle A = \angle B = 90°$. Легко заметить, что в данной трапеции средняя линия (равная полусумме длинн оснований) равна полусумме боковых сторон, т. е. удовлетворяет требованиям утверждения «в». Однако уже было показано, что прямоугольная трапеция не может быть вписана в окружность. Значит, утверждение неверно.

3. (20 баллов) *В альфацентаврианском алфавите S звонких букв, H глухих и N нейтральных. Словом называется последовательность различных букв такая, что в ней*

а) первая и последняя буквы имеют разную звонкость (т.е. не являются обе звонкими, обе глухими или обе нейтральными);

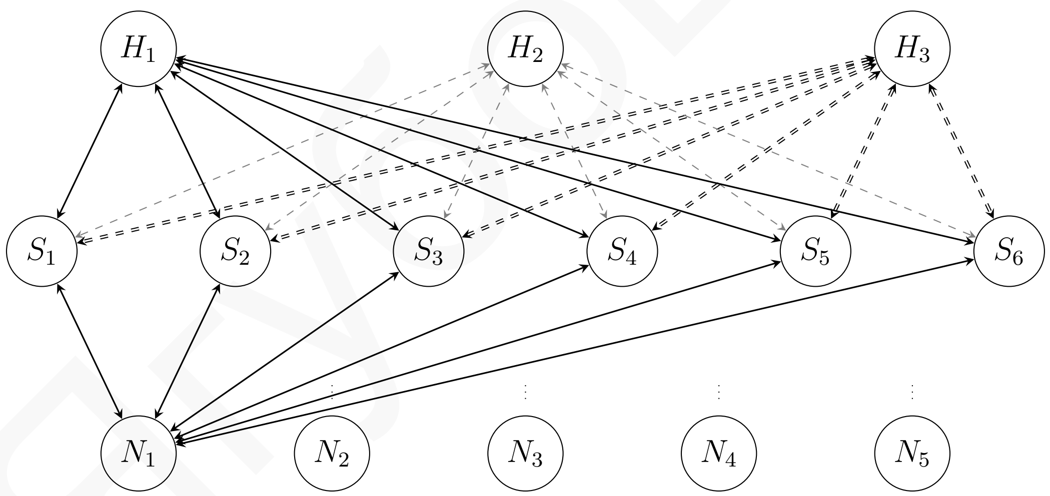
б) есть хотя бы одна звонкая буква.

Стихотворением называется последовательность различных слов такая, что каждое последующее слово начинается с той буквы, на которую закончилось предыдущее слово. Сколько слов в самом длинном стихотворении, состоящем только из двухбуквенных слов, если $S = 6$, $H = 3$, $N = 5$?

Ответ: 96.

Решение: Из условий а) и б) и того, что мы рассматриваем стихотворения из двухбуквенных слов, следует, что слова в таких стихотворениях могут быть только 4-х видов: $H + S$, $S + H$, $S + N$, $N + S$, где H — любая из глухих букв, S — любая из звонких букв. Всего слов указанных видов: 18, 18, 30, 30, соответственно. Т. е. в двухбуквенном стихотворении не может быть более 96 слов. Теперь покажем, что эта оценка достигается.

Способ первый. Рассмотрим трехдольный граф, в котором вершины первой доли соот-

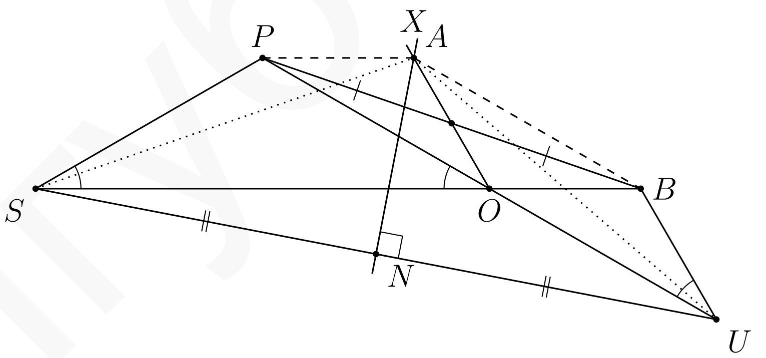


ветствуют глухим буквам (H_i, $i = 1,\ 2,\ 3$) , вершины второй — звонким (S_i, $i = 1,\ \ldots,\ 6$), вершины третьей — нейтральным (N_i, $i = 1,\ \ldots,\ 5$); таким образом, ориентированные ребра графа — двухбуквенные слова. Легко видеть, что все вершины первой доли соединены ребрами со всем вершинами второй доли и обратно (это соответствует словам первых двух типов); также все вершины третьей доли соединены ребрами со всеми вершинами второй доли и обратно (это соответствует четвертому и третьему видам слов соответственно). Для всех вершин данного графа количество входящих ребер совпадает с количеством исходящих, поэтому в нём существует эйлеров цикл (т. е. цикл, обходящий все ребра), т. е. мы можем перечислить все двухбуквенные слова так, чтобы они образовывали стихотворение. (На самом деле, такое стихотворение не единственно, оно может как начинаться с любого слова, так и по-разному «обходить ребра»; но вопрос о количестве стихотворений наибольшей длины в задаче не стоит.)

Способ второй. Можно явно построить пример перебора слов указанных видов (т. е. явно описать обход графа, описанного в способе первом). Например, будем всегда, когда это только возможно, использовать за некоторым словом в стихотворении ему обратное; начнем перебирать слова первых двух типов: $H_1S_1 - S_1H_1 - H_1S_2 - S_2H_1 - \ldots -$ $- H_1S_6 - S_6H_2 - H_2S_1 - \ldots - S_5H_2 - H_2S_6 - S_6H_3 - H_3S_1 - \ldots - S_5H_3 - H_3S_6$. Мы уже перебрали $36 - 1 = 35$ слов (осталось неиспользованным только слово S_6H_1, но оно нам потребуется для «замыкания цикла»). Теперь, аналогично, начиная с буквы S_6, на которой мы сейчас остановились, перечислим слова третьего и четвертого типов: $S_6N_5 - N_5S_6 - S_6N_4 - \ldots - N_2S_6 - S_6N_1 - N_1S_5 - S_5N_5 - N_5S_5 - S_5N_4 - \ldots - N_2S_5 - S_5N_1 -$ $- N_1S_4 - \ldots - N_1S_1 - S_1N_5 - N_5S_1 - S_1N_4 - N_4S_1 - S_1N_3 - N_3S_1 - S_1N_2 - N_2S_1 - S_1N_1 - N_1S_6$. Мы перебрали все слова третьего и четвертого типов (т. е. перебрали 60 слов) и вернулись в «исходную» букву S_6, из которой, используя последнее из неиспользованных двухбуквенных слов — S_6H_1 — мы «замкнем цикл».

4. (30 баллов) *$SPBU$ — выпуклый четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Оказалось, что углы OSP, SOP и BUO равны* $30°$. *N — середина SU. Через N проведена прямая, перпендикулярная SU, и пересекающая продолжение медианы треугольника POB, проведенной из вершины O, в точке A. Найдите величину угла SAU.*

Ответ: $120°$.



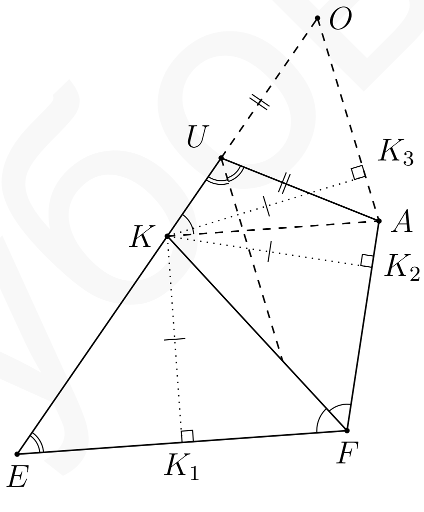
Решение: Покажем, что $PABO$ параллелограмм. Для этого возьмем точку X, чтобы $PXBO$ был параллелограммом, и покажем, что точки A и X совпадают. Углы SOP и BOU равны как вертикальные, а углы SOP и BUO равны по условию, следовательно, равны углы BOU и BUO и, тем самым, равны стороны BU и BO. По построению параллелограмма, равны BO и PX. Аналогично равны PS, PO (как боковые стороны равнобедренного по условию треугольника SPO) и BX (по построению параллелограмма). Угол UBX равен сумме углов UBO и OBX, которые равны углам SPO и OPX соответственно (равенство первой пары — из подобия треугольников SPO и OBU; равенство второй пары — из равенства противоположных углов параллелограмма). Таким образом, получаем равенство треугольников UBX и SPX по первому признаку. Следовательно, $XS = XU$, т. е. точка X лежит на серединном перпендикуляре к SU; а поскольку прямая OX содержит медиану треугольника POB, проведенную из вершины O (диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам), то точки A и X совпадают.

Теперь заметим, что $SP/SO =$ (из подобия треугольников SPO и BOU) $BO/OU =$ (из «параллелограммности» $PABO$) $= PA/OU$. Угол SPA равен сумме углов SPO и OPA, которые равны $180° - 2 \cdot 30°$ и $30°$ соответственно, т.е. угол SPA равен $150°$. Угол SOU также равен $150°$. Получаем, что треугольники SPA и SOU подобны. Т.е. равны углы PSA и OSU.

Следовательно, равны и углы ASU и PSB. Таким образом, ASU — равнобедренный треугольник, углы при основании которого равны $30°$. Т. е. угол при вершине этого треугольника равен $120°$.

5. (30 баллов) *В выпуклом четырехугольнике $UEFA$ угол E в два раза меньше угла U, а на стороне UE отмечена точка K такая, что FK — биссектриса угла F и угол UKA равен углу KFE. Верно ли, что $EK = KU + UA$?*

Ответ: Да, верно.



Решение: Отметим на луче EU за точкой U точку O так, что $UO = UA$. Тогда треугольник UOA будет равнобедренным с основанием OA, причем $\angle A = \angle O = \frac{1}{2}\angle EUA = \angle KEF$.

Заметим, что $\angle AKF = 180° - \angle UKA - \angle EKF = 180° - \angle EFK - (180° - \angle KEF - \angle EFK) = \angle KEF$. Следовательно, треугольники KOA и KAF подобны ($\angle KOA = \angle AKF$ и $\angle AKO = \angle EFK = \angle KFA$). Поэтому получаем, что $\angle KAO = \angle KAF$, т.е. AK — биссектриса угла FAO. А поскольку FK — биссектриса угла EFA, то точка K лежит на пересечении биссектрисс, так что $KK_1 = KK_2 = KK_3$, где K_i — основания перпендикуляров, опущенных на прямые EF, FA и AO соответственно.

Углы E и F в треугольнике KEF, а также углы A и O в треугольнике KAO — острые (по условию), поэтому K_1 и K_3 лежат на сторонах EF и AO соответственно. Следовательно, прямоугольные треугольники KK_1E и KK_3O равны (по второму признаку). Поэтому $KE = KO = KU + UO = KU + UA$.

6. (40 баллов) *В лотерее «29 из 13000» разыгрываются не более 29-ти натуральных чисел от 1 до 13000. Розыгрыш проводится до тех пор, пока выбираемые числа удовлетворяют следующим правилам: а) ни одно из них не является степенью (большей единицы) какого-либо натурального числа; б) из них нельзя указать несколько, сумма которых была бы степенью (большей единицы) какого-либо натурального числа. Главный приз лотереи может быть выплачен, если во время розыгрыша удалось выбрать 29 чисел в соответствии с правилами. Может ли главный приз быть когда-нибудь выплачен?*

Ответ: Да.

Решение: Покажем, что из промежутка от 1 до 13000 можно выбрать 29 натуральных чисел, удовлетворяющих правилам лотереи. Возьмем простое число 439 и числа вида $439k$, где k от 2 до 29 включительно. Легко видеть, что, во-первых, $439 \times 29 = 12731 <$ < 13000, т. е. все 29 чисел лежат в промежутке от 1 до 13000, а, во-вторых, $439(1+2+\ldots+$ $+29) = 439 \times 435 < 439^2$, т. е. даже сумма всех чисел не будет давать даже квадрат какого-либо натурального числа. (Очевидно, что сумма меньшего количества чисел вида $439k$ также не будет давать даже квадрат натурального числа, т. к. в разложении этой суммы на простые всегда будет участвовать простое число 439.)

7. (40 баллов) *Банкир К. в течение прошедшего года ежемесячно получал зарплату. В конце года банкир жертвует на благотворительность 3/2 своей самой большой зарплаты, полученной в прошедшем году. Известно, что для любого k можно выбрать k месяцев так, что суммарная зарплата банкира за эти k месяцев выражается целым числом миллионов рублей. На какую наименьшую сумму пожертвования может рассчитывать благотворительный фонд, если суммарно за год банкир К. получил зарплатой 241 млн. рублей?*

Ответ: 30,25 миллиона рублей.

Решение: Сначала попробуем оценить, насколько маленькой может быть самая большая зарплата банкира в прошедшем году (если она на самом деле была больше, то благотворительный фонд получит пожертвование большего размера — нас же интересует, меньше чего пожертвование банкира не может быть). Возьмем $k = 6$ и рассмотрим S — суммарную зарплату банкира за те k месяцев, когда она выражалась целым числом миллионов рублей. Если S хотя бы 121 (миллион рублей), то наибольшее из слагаемых, составляющих S, как минимум $121/6 = 20\frac{1}{6}$. (Если S не больше 120, то тогда суммарная зарплата за другие 6 месяцев не меньше 121.)

Теперь построим пример, на котором достигается полученная нами оценка. Легко заметить, что если банкир в течение 6 месяцев в году получал по 20 миллионов рублей в месяц, а в течение других 6 месяцев — по $20\frac{1}{6}$ миллионов рублей, то можно выбрать периоды длиной от одного до 12 месяцев, суммарная зарплата за которые целочисленна (в миллионах рублей) — для k от 1 до 6 можно выбирать месяцы с зарплатой по 20 миллионов, а для k от 7 до 12 — все 6 месяцев с зарплатой по $20\frac{1}{6}$ миллионов плюс необходимое количество (т. е. $k-6$) месяцев с зарплатой по 20 миллионов.

Вспомним, что по условию задачи, банкир жертвует на благотворительность $3/2$ своей самой большой зарплаты; поскольку наибольшая зарплата, как мы выяснили, не может быть меньше, чем $20\frac{1}{6}$ миллионов рублей, то благотворительный фонд может рассчитывать на пожертвование как минимум в $3/2 \times 20\frac{1}{6} = 30\frac{1}{4}$ $(= 30{,}25)$ миллиона рублей.