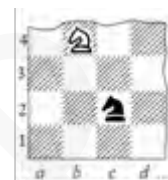


Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания для 10 класса

1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из  $16 \times 16$  клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)



2. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (12 баллов)

3. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 70 натуральных делителей (включая единицу и само число). (16 баллов)

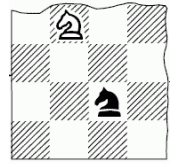
4. Решите неравенство  $(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3})\left(|x^2 - 4x + 2| - |x - 2|\right) \leq 0$ . (20 баллов)

5. Укажите все значения  $a$ , при которых система уравнений  $3(x - a)^2 + y = 2 - a$ ,  $y^2 + \left(\frac{x - 2}{|x| - 2}\right)^2 = 1$  имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом  $a$ . (20 баллов)

6. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника  $ABC$ . Первая окружность радиуса  $\frac{1}{18}$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $L$  и  $K$ , вторая окружность радиуса  $\frac{2}{9}$  касается сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $M$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AL = \frac{1}{9}$ ,  $CM = \frac{1}{6}$ . (20 баллов)

**Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)**

1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из  $16 \times 16$  клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)



**Решение:** Свяжем с доской  $n \times n$  ( $n > 2$ ) прямоугольную систему координат. Обозначим координаты двух коней через  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , где  $x_k, y_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k = 1, 2$ . Кони угрожают друг другу, если 1)  $|x_1 - x_2| = 1$ ,  $|y_1 - y_2| = 2$  или 2)  $|x_1 - x_2| = 2$ ,  $|y_1 - y_2| = 1$ . В первом случае есть четыре такие возможности:

$$1 \leq x_1 \leq n-1, x_2 = x_1 + 1, 1 \leq y_1 \leq n-2, y_2 = y_1 + 2;$$

$$1 \leq x_1 \leq n-1, x_2 = x_1 + 1, 1 \leq y_2 \leq n-2, y_1 = y_2 + 2;$$

$$1 \leq x_2 \leq n-1, x_1 = x_2 + 1, 1 \leq y_1 \leq n-2, y_2 = y_1 + 2;$$

$$1 \leq x_2 \leq n-1, x_1 = x_2 + 1, 1 \leq y_2 \leq n-2, y_1 = y_2 + 2.$$

Каждому из этих подслучаев соответствуют по  $(n-1)(n-2)$  позиции. Второй случай отличается от первого поворотом на  $90^\circ$ . При  $n = 16$  имеем  $8(n-1)(n-2) = 8 \cdot 15 \cdot 14 = 1680$ .

**Ответ:** 1680.

2. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (12 баллов)

**Решение:** Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть  $x$  – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах,  $t_1$  – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а  $t_2$  – время,

которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда  $t_1 = \frac{x}{8} + \frac{3-x}{4} = \frac{6-x}{8}$  и

$$t_2 = \frac{3-x}{10} + \frac{x}{5} = \frac{3+x}{10}. \text{ Отметим, что функция } t_1(x) \text{ убывающая, а функция } t_2(x) \text{}$$

возрастающая. Укажем значение  $x$ , при котором  $t_1 = t_2$ , то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из  $\frac{6-x}{8} = \frac{3+x}{10} \Rightarrow x = 2$ ,  $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$  часа. Если  $x < 2$ , то  $t_1(x) > \frac{1}{2} > t_2(x)$ , если

$x > 2$ , то  $t_1(x) < \frac{1}{2} < t_2(x)$ . Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 0,5 часа. **Ответ:** 0,5 ч.

3. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 70 натуральных делителей (включая единицу и само число). (16 баллов)

**Решение:** Пусть  $n$  – искомое натуральное число,  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$  – разложение числа  $n$  на простые сомножители. Любой натуральный делитель этого числа имеет вид  $d = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_m^{l_m}$ , где  $l_i \in \{0, 1, \dots, k_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Число делителей числа  $n$  равно  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_m + 1) = 70$ . Разложим число 70 на неединичные сомножители всеми

**Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)**

возможными способами и выберем наименьшее число  $n$ . Поскольку  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ , то имеем пять случаев:

- 1)  $70 = 70$ , наименьшее число  $n = 2^{69} > 40000$ ;
- 2)  $70 = 35 \cdot 2$ , наименьшее число  $n = 2^{34} \cdot 3^1 > 40000$ ;
- 3)  $70 = 14 \cdot 5$ , наименьшее число  $n = 2^{13} \cdot 3^4 > 40000$ ;
- 4)  $70 = 10 \cdot 7$ , наименьшее число  $n = 2^9 \cdot 3^6 = 512 \cdot 81 > 40000$ ;
- 5)  $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$ , наименьшее число  $n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 25920$ .

**Ответ:** 25920.

4. Решите неравенство  $\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(|x^2 - 4x + 2| - |x - 2|\right) \leq 0$ . (20 баллов)

**Решение:**

$$\text{ОДЗ: } 2x^2 + 7x + 3 \geq 0, \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-0,5; +\infty).$$

Исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left((x^2 - 4x + 2)^2 - (x - 2)^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 3x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)(x - 1)(x - 4)x(x - 3) \leq 0.$$

Если  $x \leq -3$ , то  $3x + 4 < 0$ , и  $\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right) < 0$ . Таким образом, приходим к неравенству  $(x - 1)(x - 4)x(x - 3) \geq 0$ , и  $x \in (-\infty; -3]$ .

Если  $x \geq -0,5$ , то приходим к неравенству

$$\left(\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 3}\right)^2 (x - 1)(x - 4)x(x - 3) \leq 0, \text{ и } x \in [0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4].$$

Окончательно имеем  $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4]$ .

**Ответ:**  $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4]$ .

5. Укажите все значения  $a$ , при которых система уравнений  $3(x - a)^2 + y = 2 - a$ ,  $y^2 + \left(\frac{x - 2}{|x| - 2}\right)^2 = 1$  имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом  $a$ . (20 баллов)

**Решение.** Преобразуем второе уравнение:  $y^2 = \frac{x^2 - 4|x| + 4 - x^2 + 4x - 4}{(|x| - 2)^2}$ ;  $y^2 = -\frac{4(|x| - x)}{(|x| - 2)^2}$ .

При  $x < 0$  уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при  $x \geq 0$  оно равносильно системе:  $x \geq 0$ ,  $x \neq 2$ ,  $y = 0$ . Подставляя  $y = 0$  в первое уравнение,

получаем;  $3(x - a)^2 = 2 - a$ , или  $3x^2 - 6ax + 3a^2 + a - 2 = 0$  (\*), у которого

$$D/4 = 9a^2 - 9a^2 - 3a + 6 = 6 - 3a.$$

**Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)**

Корень  $x = 2$  квадратного уравнения может получиться, когда  $3(2-a)^2 = 2-a$ , т.е. если

1)  $a = 2$ , уравнение имеет вид  $(x-2)^2 = 0$ , тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2)  $3(2-a) = 1$ , т.е.  $a = 5/3$ , тогда для  $x$  получаем уравнение  $3(x-5/3)^2 = 2-5/3$ ,  $x = 5/3 \pm 1/3$ , у которого, кроме постороннего корня  $x_1 = 2$ , есть еще один корень  $x_2 = 4/3$ , удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение  $(4/3; 0)$ .

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

$$1. \begin{cases} D/4 = 6 - 3a = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 2. \end{cases} \text{ Система решений не имеет.}$$

$$2. 3a^2 + a - 2 < 0, \text{ т.е. при } -1 < a < 2/3 \quad x = (3a + \sqrt{6-3a})/3.$$

3.  $3a^2 + a - 2 = 0$ , отсюда  $a = 2/3$ ,  $3x^2 - 4x = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4/3$  удовлетворяют условиям, или  $a = -1$ ,  $3x^2 + 6x = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$  – посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (\*) будет иметь два различных неотрицательных корня  $x_{1,2} = (3a \pm \sqrt{6-3a})/3$ , если

$$\begin{cases} 6-3a > 0, \\ a > 0, \\ 3a^2 + a - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 2, \\ [a \leq -1, \Leftrightarrow 2/3 \leq a < 2. \end{cases} \text{ Из этого промежутка надо убрать}$$

рассмотренную ранее точку  $a = 5/3$ . Объединяя найденные значения  $a$ , получим ответ.

$$\text{Ответ: } a \in [-1; 2/3), \quad x = (3a + \sqrt{6-3a})/3, \quad y = 0;$$

$$a \in [2/3; 5/3) \cup (5/3; 2), \quad x_{1,2} = (3a \pm \sqrt{6-3a})/3, \quad y = 0;$$

$$a = 5/3, \quad x = 4/3, \quad y = 0.$$

6. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника  $ABC$ . Первая окружность радиуса  $\frac{1}{18}$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $L$  и  $K$ , вторая окружность радиуса  $\frac{2}{9}$  касается сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $M$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AL = \frac{1}{9}$ ,  $CM = \frac{1}{6}$ . (20 баллов)

## Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)

**Решение:**  $a = \frac{1}{9}$ ,  $b = \frac{1}{6}$ ,  $r = \frac{1}{18}$ ,  $R = \frac{2}{9}$

$$KN = 2\sqrt{rR} = \frac{2}{9}, \quad AC = a + KN + b = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{a}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{R}{b},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{a^2 + r^2}, \quad \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{b^2}{b^2 + R^2},$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{2a^2}{a^2 + r^2} - 1 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} = \frac{3}{5},$$

$$\cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1 = \frac{2b^2}{b^2 + R^2} - 1 = \frac{b^2 - R^2}{b^2 + R^2} = -\frac{7}{25},$$

$$\sin A = \frac{2ar}{a^2 + r^2} = \frac{4}{5},$$

$$\sin C = \frac{2bR}{b^2 + R^2} = \frac{24}{25}, \quad \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{44}{125}.$$

Теорема синусов:  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{AC^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot 24 \cdot 125}{8 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 44} = \frac{3}{11}.$$

**Ответ:**  $\frac{3}{11}.$

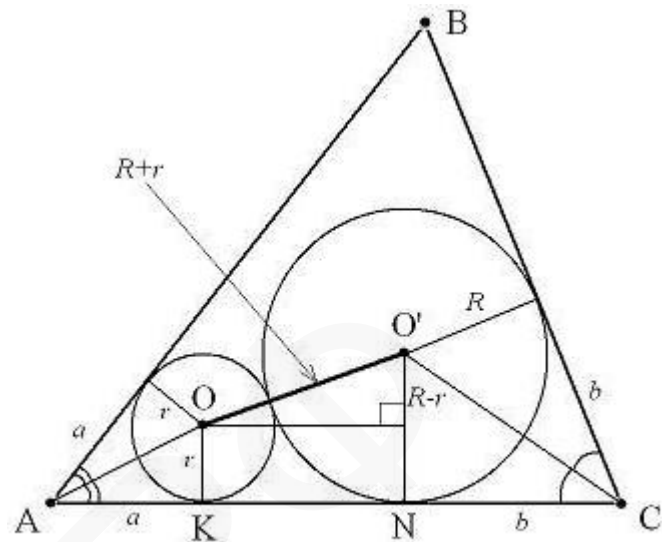


Рис. 1