КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. В школе у Васи принят этический кодекс, который предписывает всем мальчикам иметь штаны длины не меньшей 20% от их роста. Когда измерили длину Васиных штанов, то она оказалась на 20% меньше разрешённой. Тогда Вася отдал штаны своему младшему брату, который на 10 см ниже. В результате выяснилось, что всё равно штаны короче разрешённых на 4 см. Какой рост у Васи?

2. В 100-буквенном слове есть хотя бы 10 различных букв, причём среди любых 29 стоящих подряд букв встречаются хотя бы 9 различных. Докажите, что среди каких-то 30 стоящих подряд букв встретятся 10 различных.

3. Группа из пяти мальчиков и пяти девочек сдавала тест, за который каждому ставилась оценка от 1 до 10. У каждой девочки в этой группе есть хотя бы два знакомых мальчика, а у каждого мальчика — хотя бы две знакомых девочки. В результате каждый из мальчиков получил оценку ниже, чем каждая из знакомых ему девочек. Может ли средняя оценка мальчиков оказаться выше, чем средняя оценка девочек?

4. Петя сказал Васе, что задумал натуральное число, не превосходящее тройки. Вася хочет его угадать. Он для этого может задавать вопросы вида: «Верно ли, что задуманное тобой число равно a?», где a — натуральное число, не превосходящее тройки, причём каждый следующий вопрос задается только после ответа на предыдущий. Помогите Васе угадать число за 100 таких вопросов, если известно, что ровно на 60 вопросов Петя ответит правду, а на остальные 40 солжёт.

5. *Расстоянием между двумя клетками* клетчатого квадрата назовём наименьшее количество ходов, которое потребуется фишке, чтобы добраться из первой клетки во вторую, перемещаясь каждым ходом на соседнюю по стороне клетку. Назовем *равносторонним треугольником* набор из трех клеток, все три расстояния между которыми равны. Докажите, что все клетки квадрата 99×99 нельзя разбить на равносторонние треугольники.

6. Какое наибольшее количество не делящихся на 4 натуральных чисел, меньших 850, можно выбрать таким образом, чтобы у любых двух выбранных чисел был общий делитель, больший 1?

7. По кругу расставлено 100 красных и 100 синих точек. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком красную точку с синей, если они ещё не соединены. Выигрывает тот, кто первым получит цикл длины 4. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

8. Число 124 обладает таким свойством, что как бы ни разбить его запись на две части, сумма двух получившихся чисел равна квадрату натурального числа: $12+4 = 4^2$; $1+24 = 5^2$. Существует ли 100-значное число, не содержащее в своей записи нулей, с таким же свойством?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. В школе у Васи принят этический кодекс, который предписывает всем мальчикам иметь штаны длины не меньшей 20% от их роста. Когда измерили длину Васиных штанов, то она оказалась на 20% меньше разрешённой. Тогда Вася отдал штаны своему младшему брату, который на 10 см ниже. В результате выяснилось, что всё равно штаны короче разрешённых на 4 см. Какой рост у Васи?

2. В озере рыболовецкого хозяйства живут караси, карпы и одна прожорливая щука, других рыб в озере нет. Сегодня средний вес карпов в 4 раза больше среднего веса карасей в озере, а средний вес всей рыбы в озере, не считая щуки, в 2 раза меньше среднего веса карпов. Каждый день щука съедает не меньше одной, но не больше четырёх рыб. Оказалось, что в какой-то из дней, вчера или сегодня, в озере оказалось ровно 2018 рыб, не считая щуки. Сколько рыб съела щука в ночь со вчера на сегодня?

3. Точка M — середина отрезка AB. По одну сторону от прямой AB отметили такое точки L и N, что LM — биссектриса угла AMN, а NM — биссектриса угла BML. Докажите, что $\angle ALB = \angle ANB$, если известно, что $ML = MN$.

4. *Расстоянием между двумя клетками* клетчатого квадрата назовём наименьшее количество ходов, которое потребуется фишке, чтобы добраться из первой клетки во вторую, перемещаясь каждым ходом на соседнюю по стороне клетку. Назовем *равносторонним треугольником* набор из трех клеток, все три расстояния между которыми равны. Докажите, что все клетки квадрата 99×99 нельзя разбить на равносторонние треугольники.

5. Какое наибольшее количество не делящихся на 4 натуральных чисел, меньших 850, можно выбрать таким образом, чтобы у любых двух выбранных чисел был общий делитель, больший 1?

6. По кругу расставлено 75 положительных чисел. Для каждого числа из его квадрата вычли единицу, деленную на следующее за ним по часовой стрелке число. Все 75 полученных чисел оказалось одинаковыми. Докажите, что и все исходные числа были одинаковыми.

7. Найдите все такие натуральные числа x и y и простое число p, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{p}$.

8. Петя сказал Васе, что задумал натуральное число, не превосходящее 20. Вася хочет его угадать. Он для этого может задавать вопросы вида: «Верно ли, что задуманное тобой число равно a?», где a — натуральное число, не превосходящее 20, причём каждый следующий вопрос задается только после ответа на предыдущий. Помогите Васе угадать число за 1950 таких вопросов, если известно, что ровно на 1850 вопросов Петя ответит правду, а на остальные 100 соврёт.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. По прямому шоссе Урюпинск–Мухославск с постоянными, но различными скоростями двигались 10 машин с номерами от 1 до 10. Могло ли случиться так, что для любого порядка десяти номеров был момент, когда машины располагались именно в этом порядке (считая от Урюпинска к Мухославску)? Известно, что машины никогда не встречались одновременно по три и больше.

2. На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC за точку C лежит точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $BD = DE$. Докажите, что $AD = CE$.

3. *Расстоянием между двумя клетками* клетчатого квадрата назовём наименьшее количество ходов, которое потребуется фишке, чтобы добраться из первой клетки во вторую, перемещаясь каждым ходом на соседнюю по стороне клетку. Назовем *равносторонним треугольником* набор из трех клеток, все три расстояния между которыми равны. Докажите, что все клетки квадрата 99×99 нельзя разбить на равносторонние треугольники.

4. Пусть P_n — количество способов выписать в строчку несколько (возможно, ни одного) различных натуральных чисел, не превосходящих n. Докажите, что для любых различных натуральных m и n разность P_n-P_m делится на $n-m$.

5. Петя задумал чётное натуральное число M и сказал: «Сумма цифр числа $2M$ равняется 2018, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 518». Потом подумал ещё и сказал: «А ещё в десятичной записи числа M встречаются только цифры 0, 2, 4, 5, 7, 9». Чему может равняться сумма цифр числа M?

6. По клеткам таблицы 1526×1526 ползает черепашка, которая умеет переползать из клетки в соседнюю с ней по стороне. Она начинает свой маршрут в угловой клетке, посещает каждую клетку ровно один раз и возвращается в ту же клетку, с которой начала. При каком наибольшем k заведомо найдётся строка или столбец, куда черепашка заползала (из соседних рядов) не менее k раз?

7. Точки D, E, F — середины сторон BC, AB и AC треугольника ABC соответственно. Биссектриса угла ADB пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла ADC пересекает сторону AC в точке N. Прямые AD и MN пересекаются в точке O, прямые AB и FO — в точке P, а прямые AC и EO — в точке R. Докажите, что $PR = AD$.

8. Существует ли последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ..., все члены которой различны, такая, что при каждом натуральном k число $2^k a_1 a_2 \ldots a_k$ делится на a_{k+1}^k?

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *В школе у Васи принят этический кодекс, который предписывает всем мальчикам иметь штаны длины не меньшей 20% от их роста. Когда измерили длину Васиных штанов, то она оказалась на 20% меньше разрешённой. Тогда Вася отдал штаны своему младшему брату, который на 10 см ниже. В результате выяснилось, что всё равно штаны короче разрешённых на 4 см. Какой рост у Васи?*

Ответ. 150 см. Решение. Пусть рост Васи равен x см. Тогда длина его штанов равна $0{,}2x–0{,}2\cdot0{,}2x = 0{,}16x$ см. Та же длина по условию равна $0{,}2(x–10)–4$ см. Решая уравнение $0{,}16x = 0{,}2(x–10)–4$, получаем ответ.

Задача 2. *В 100-буквенном слове есть хотя бы 10 различных букв, причём среди любых 29 стоящих подряд букв встречаются хотя бы 9 различных. Докажите, что среди каких-то 30 стоящих подряд букв встретятся 10 различных.*

Решение. Для каждой буквы подчеркнём её первое вхождение в слово. Возьмём десятую слева из подчёркнутых букв — пусть это Ъ. Если перед ней в слове стоит хотя бы 29 букв, возьмём её и стоящие перед ней 29 букв. Среди этих 29 букв есть хотя бы 9 различных и нет буквы Ъ. Значит, среди 30 взятых нами букв хотя бы 10 различных. Если же перед Ъ меньше 29 букв, то возьмём 30 стоящих подряд букв, начиная с первой буквы слова. Тогда 10 разных букв будет уже среди букв от первой до Ъ.

Задача 3. *Группа из пяти мальчиков и пяти девочек сдавала тест, за который каждому ставилась оценка от 1 до 10. У каждой девочки в этой группе есть хотя бы два знакомых мальчика, а у каждого мальчика —хотя бы две знакомых девочки. В результате каждый из мальчиков получил оценку ниже, чем каждая из знакомых ему девочек. Может ли средняя оценка мальчиков оказаться выше, чем средняя оценка девочек?*

Ответ. Может. Решение. Пусть Петя, Вася и Миша с оценками 9 дружат с Валей и Машей с оценками 10, а Коля и Толя с оценками 1 дружат с Ириной, Ариной и Алиной с оценками 2. Тогда средний балл мальчиков — 5,8, а девочек — 5,2.

Задача 4. *Петя сказал Васе, что задумал натуральное число, не превосходящее тройки. Вася хочет его угадать. Он для этого может задавать вопросы вида: «Верно ли, что задуманное тобой число равно а?», где а — натуральное число, не превосходящее тройки, причём каждый следующий вопрос задается только после ответа на предыдущий. Помогите Васе угадать число за 100 таких вопросов, если известно, что ровно на 60 вопросов Петя ответит правду, а на остальные 40 солжёт.*

Решение. Пусть Вася задаст 99 раз подряд вопрос «Верно ли, что задуманное тобой число равно 1?». Среди ответов на этот вопрос будет не менее 59 верных, и мы узнаем верный ответ на этот вопрос, а также то, верным (если верных ответов было 59) или неверным (если верных ответов было 60) будет ответ на сотый вопрос: «Верно ли, что задуманное тобой число равно 2?». Таким образом, после сотого вопроса Вася узнает, задумана ли двойка. Если нет, то задумана тройка.

Задача 5. ***Расстоянием между двумя клетками*** *клетчатого квадрата назовём наименьшее количество ходов, которое потребуется фишке, чтобы добраться из первой клетки во вторую, перемещаясь каждым ходом на соседнюю по стороне клетку. Назовем равносторонним треугольником набор из трех клеток, все три расстояния между которыми равны. Докажите, что все клетки квадрата 99×99 нельзя разбить на равносторонние треугольники.*

Решение. Покрасим клетки доски в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что если расстояние между клетками нечётно, они покрашены в разные цвета, а если чётно — в одинаковые. Поэтому клетки, образующие равносторонний треугольник, покрашены в один цвет. Но клеток одного цвета у нас $(99^2+1)/2$, а другого — $(99^2–1)/2$, и оба эти числа не делятся на 3.

Задача 6. *Какое наибольшее количество не делящихся на 4 натуральных чисел, меньших 850, можно выбрать таким образом, чтобы у любых двух выбранных чисел был общий делитель, больший 1?*

Ответ. 213. Решение. Разобьём числа от 1 до 848 на 212 четвёрок идущих подряд: 1, 2, 3, 4; …; 845, 846, 847, 848. Последнее число каждой четвёрки брать нельзя, а среди оставшихся трёх чисел любые два взаимно просты: общий делитель 2 могут иметь только первое и последнее из них, но они нечётны. Поэтому больше 212+1 = 213 чисел выбрать нельзя. Ровно 213 чисел получится, если взять все числа, меньшие 850, делящиеся на 3.

Задача 7. *По кругу расставлено 100 красных и 100 синих точек. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком красную точку с синей, если они ещё не соединены. Выигрывает тот, кто первым получит цикл длины 4. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?*

Ответ. Вася. Решение. Цикл длины 4 можно получить, только соединив концы цепи длины 3. Поэтому тот, после хода которого образуется цепь длины 3, проиграл. Значит, концы цепи длины 2 соединять с другими точками нельзя. Стратегия Васи: после каждого хода Пети соединять ту же красную точку с какой-то синей, которая ещё не соединена ни с какой другой. Тогда после каждой пары ходов Пети и Васи число не соединённых с другими синих точек будет уменьшаться на 2, и после 50-го хода Васи каждая синяя точка будет концом цепи длины 2. Своим 51-м ходом Петя создаст цепь длины 3 и проиграет.

Задача 8. *Число 124 обладает таким свойством, что как бы ни разбить его запись на две части, сумма двух получившихся чисел равна квадрату натурального числа: $12+4 = 4^2$; $1+24 = 5^2$. Существует ли 100-значное число, не содержащее в своей записи нулей, с таким же свойством?*

Ответ. Не существует. Решение. Пусть существует такое число k. Пусть при разбиении k на первые 99 и последнюю цифру b в сумме получается m^2, а при разбиении k на первые 97 и последние три цифры в сумме получается n^2. Тогда $n^2 = (m^2-b-a)/100+10a+b$, где a — двузначное число, образованное второй и третьей с конца цифрами числа a, откуда $100n^2-m^2 = 999a+99b \Leftrightarrow (10n-m)(10n+m) = 999a+99b < 110000$, так как $a < 100$ и $b < 10$. Но число $10n+m$ по крайней мере 49-значное, так что $10n-m = a = 0$, а это невозможно, поскольку в записи числа k нет нулей.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *В школе у Васи принят этический кодекс, который предписывает всем мальчикам иметь штаны длины не меньшей 20% от их роста. Когда измерили длину Васиных штанов, то она оказалась на 20% меньше разрешённой. Тогда Вася отдал штаны своему младшему брату, который на 10 см ниже. В результате выяснилось, что всё равно штаны короче разрешённых на 4 см. Какой рост у Васи?*

Ответ. 150 см. Решение. Пусть рост Васи равен x см. Тогда длина его штанов равна $0{,}2x-0{,}2\cdot 0{,}2x = 0{,}16x$ см. Та же длина по условию равна $0{,}2(x-10)-4$ см. Решая уравнение $0{,}16x = 0{,}2(x-10)-4$, получаем ответ.

Задача 2. *В озере рыболовецкого хозяйства живут караси, карпы и одна прожорливая щука, других рыб в озере нет. Сегодня средний вес карпов в 4 раза больше среднего веса карасей в озере, а средний вес всей рыбы в озере, не считая щуки, в 2 раза меньше среднего веса карпов. Каждый день щука съедает не меньше одной, но не больше четырёх рыб. Оказалось, что в какой-то из дней, вчера или сегодня, в озере оказалось ровно 2018 рыб, не считая щуки. Сколько рыб съела щука в ночь со вчера на сегодня?*

Ответ. Две рыбы. Решение. Пусть сегодня в озере r карасей и d карпов, а средний вес карася — x. По условию общий вес карпов в озере равен $4dx$, откуда $(rx+4dx)/(r+d) = 2x$. Преобразуя это равенство, получаем, что $r = 2d$, то есть всего сегодня в озере, не считая щуки, $r+d = 3d$ рыб. Так как 2018 не делится на 3, 2018 рыб в озере было вчера. Вычесть число от 1 до 4 из 2018 так, чтобы разность делилась на 3, можно только одним способом: если вычитаемое равно 2, откуда и получаем ответ.

Задача 3. *Точка M — середина отрезка AB. По одну сторону от прямой AB отметили такое точки L и N, что LM — биссектриса угла AMN, а NM — биссектриса угла BML. Докажите, что $\angle ALB = \angle ANB$, если известно, что $ML = MN$.*

Решение. Из условия следует, что $\angle AML = \angle LMN = \angle NMB$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, каждый из них равен 60°. Поэтому треугольники BML и AMN равны ($MA = MB$, $ML = MN$, $\angle AMN = \angle LMB$), откуда $AN = BL$ и $\angle BAN = \angle ABL$. Но тогда по двум сторонам и углу между ними равны и треугольники ABL и BAN, откуда и следует, что $\angle ALB = \angle ANB$.

Задача 4. ***Расстоянием между двумя клетками*** *клетчатого квадрата назовём наименьшее количество ходов, которое потребуется фишке, чтобы добраться из первой клетки во вторую, перемещаясь каждым ходом на соседнюю по стороне клетку. Назовем равносторонним треугольником набор из трех клеток, все три расстояния между которыми равны. Докажите, что все клетки квадрата 99×99 нельзя разбить на равносторонние треугольники.*

Решение. Покрасим клетки доски в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что если расстояние между клетками нечётно, они покрашены в разные цвета, а если чётно — в одинаковые. Поэтому клетки, образующие равносторонний треугольник, покрашены в один цвет. Но клеток одного цвета у нас $(99^2+1)/2$, а другого — $(99^2-1)/2$, и оба эти числа не делятся на 3.

Задача 5. *Какое наибольшее количество не делящихся на 4 натуральных чисел, меньших 850, можно выбрать таким образом, чтобы у любых двух выбранных чисел был общий делитель, больший 1?*

Ответ. 213. Решение. Разобьём числа от 1 до 848 на 212 четвёрок идущих подряд: 1, 2, 3, 4; …; 845, 846, 847, 848; и число 849. Последнее число каждой четвёрки брать нельзя, а среди оставшихся трёх чисел любые два взаимно просты: общий делитель 2 могут иметь только первое и последнее из них, но они нечётны. Поэтому больше 212+1 = 213 чисел выбрать нельзя. 213 чисел получится, если взять все числа, меньшие 850, делящиеся на 3 и не делящиеся на 4.

Задача 6. *По кругу расставлено 75 положительных чисел. Для каждого числа из его квадрата вычли единицу, деленную на следующее за ним по часовой стрелке число. Все 75 полученных чисел оказалось одинаковыми. Докажите, что и все исходные числа были одинаковыми.*

Решение. Заметим, что если $a^2-1/b = b^2-1/c$ (*) и $a = b$, то $b = c$. Таким образом, если среди расставленных чисел есть два одинаковых, стоящих рядом, то все 75 чисел равны между собой. Допустим, любые два числа, стоящие рядом, различны. Преобразуем равенство (*): $a^2-b^2 = 1/b-1/c \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = -(b-c)/bc$. Перемножив все 75 таких равенств для наших стоящих по кругу чисел и разделив обе части на произведение всех разностей соседних чисел, получим в левой части произведение попарных сумм стоящих рядом чисел, а в правой — произведение квадратов стоящих по кругу чисел, взятое со знаком минус. Получилось, что положительное число равно отрицательному — противоречие.

Задача 7. *Найдите все такие натуральные числа x и y и простое число p, что* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{p}$.

Ответ. $x = y = 3$. Решение. Приведём уравнение из условия к виду $p(x^2+xy+y^2) = xy(x+y)$ (*). Если $p = 2$, то имеем $2x^2+2xy+2y^2 = x^2y+xy^2 \Leftrightarrow x^2(y-2)+y^2(x-2) = 2xy$, откуда $x, y > 2$. Не умаляя общности, $x \geq y$. Если $y > 3$, то $x^2(y-2)+y^2(x-2) \geq 2(x^2+y^2) > 2xy$. Значит, $y = 3$, откуда $x^2+9x-18 = 6x \Leftrightarrow x^2+3x-18 = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 18$, откуда $x = 3$ (при $x < 3$ $x(x+3) < 18$, при $x > 3$ $x(x+3) > 18$).

Пусть $p > 2$. Тогда p нечетно, и если хотя бы одно из чисел x и y нечетно, тогда правая часть равенства (*) четна, а левая нечетна. Значит, x и y должны быть четными. Пусть $x = 2^a z$, $y = 2^b t$, где z и t нечетны. Тогда $xy(x+y)$ делится на 2^{a+b+1}. Не умаляя общности положим $a \geq b$. Если $a > b$, то x^2+xy+y^2 делится на 2^b, но не делится на 2^{b+1}, и, тем более, на 2^{a+b+1}, а если $a = b$, то x^2+xy+y^2 делится на 2^{a+b}, но не делится на 2^{a+b+1}, так что равенство (*) также невозможно. Таким образом, при $p > 2$ решений нет.

Задача 8. *Петя сказал Васе, что задумал натуральное число, не превосходящее 20. Вася хочет его угадать. Он для этого может задавать вопросы вида: «Верно ли, что задуманное тобой число равно a?», где a — натуральное число, не превосходящее 20, причём каждый следующий вопрос задается только после ответа на предыдущий. Помогите Васе угадать число за 1950 таких вопросов, если известно, что ровно на 1850 вопросов Петя ответит правду, а на остальные 100 соврёт.*

Решение. Пусть Вася про каждое из чисел 1, 2, …, 18 спрашивает, пока не получит 101 одинаковый (и, очевидно, верный) ответ. Так как соврать Петя может только 100 раз, Вася потратит на это не более 1818+100 = 1918 вопросов. Если было загадано число от 1 до 18, Вася уже победил, и ему осталось задать какие угодно вопросы, чтобы довести их число до 1950. В противном случае задумало число 19 или 20. Пусть Вася, уже зная верные ответы, задаст ещё несколько вопросов про те же числа от 1 до 18, пока не останется один неиспользованный вопрос. Вася в этот момент уже будет знать, сколько раз Петя соврал, и, таким образом, будет знать, соврёт Петя в ответ на оставшийся вопрос. Теперь ему достаточно спросить: «Верно ли, что задуманное тобой число равно 19?», и он узнает, задумано ли число 19. Если нет, то задумано 20.

LI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2018

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *По прямому шоссе Урюпинск–Мухославск с постоянными, но различными скоростями двигались 10 машин с номерами от 1 до 10. Могло ли случиться так, что для любого порядка десяти номеров был момент, когда машины располагались именно в этом порядке (считая от Урюпинска к Мухославску)? Известно, что машины никогда не встречались одновременно по три и больше.*

Ответ. Не могло. Решение. Порядок расположения машин меняется только когда одна из машин обгоняет другую. Всего таких обгонов случилось не более $10 \cdot 9/2 = 45$, а различных порядков расположения машин — $10!$, что больше, чем $45+1$.

Задача 2. *На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC за точку C лежит точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что BD = DE. Докажите, что AD = CE.*

Решение. Отразим треугольник BCD относительно высоты DH равнобедренного треугольника BDE. Получим треугольник EFD, где $FE = BC = AC$ и $CD = DF$. Из последнего равенства, так как $\angle DCE = 60°$, следует, что треугольник CDF — равносторонний, откуда $CD = CF$. Значит, $AD = AC+CD = FE+CF = CE$.

Задача 3. ***Расстоянием между двумя клетками*** *клетчатого квадрата назовём наименьшее количество ходов, которое потребуется фишке, чтобы добраться из первой клетки во вторую, перемещаясь каждым ходом на соседнюю по стороне клетку. Назовем* ***равносторонним треугольником*** *набор из трех клеток, все три расстояния между которыми равны. Докажите, что все клетки квадрата 99×99 нельзя разбить на равносторонние треугольники.*

Решение. Покрасим клетки доски в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что если расстояние между клетками нечётно, они покрашены в разные цвета, а если чётно — в одинаковые. Поэтому клетки, образующие равносторонний треугольник, покрашены в один цвет. Но клеток одного цвета у нас $(99^2+1)/2$, а другого — $(99^2-1)/2$, и оба эти числа не делятся на 3.

Задача 4. *Пусть P_n — количество способов выписать в строчку несколько (возможно, ни одного) различных натуральных чисел, не превосходящих n. Докажите, что для любых различных натуральных m и n разность $P_n - P_m$ делится на $n-m$.*

Решение. Заметим, что количество способов выписать k чисел с соблюдением условия задачи равно $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, причём это верно и для $k > n$, так как в этом случае произведение равно 0. Поэтому достаточно доказать, что $n(n-1)\ldots(n-k+1)-m(m-1)\ldots(m-k+1)$ делится на $n-m$. А для этого достаточно раскрыть скобки, сгруппировать члены с одинаковыми степенями n и m и заметить, что коэффициенты при этих членах одинаковы, а n^s-m^s делится на $n-m$ при любом s (что можно проверить, например, с помощью деления «уголком» или найдя разложение разности n^s-m^s на множители в справочнике).

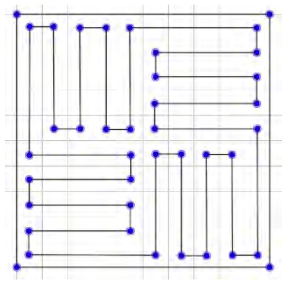
Задача 5. *Петя задумал чётное натуральное число M и сказал: «Сумма цифр числа 2M равняется 2018, а сумма цифр числа M/2 равняется 518». Потом подумал ещё и сказал: «А ещё в десятичной записи числа M встречаются только цифры 0, 2, 4, 5, 7, 9». Чему может равняться сумма цифр числа M?*

Ответ. 1018. Решение. Заметим, что при сложении $M/2$ и $M/2$ нечетные цифры могут возникать только в результате переноса единицы в следующий разряд. Поэтому количество нечетных цифр в записи числа M равно количеству таких переносов. Далее, при сложении M и M переносы происходят только из разрядов, где стоят цифры, не меньшие 5. Но по условию в записи числа M это в точности то же, что нечетные цифры. Поэтому при сложении M и M количество переносов таково же, как и при сложении $M/2$ и $M/2$. Пусть это количество равно k.

Заметим, что каждый перенос уменьшает сумму цифр суммы двух чисел по сравнению с суммой цифр слагаемых на 9. Таким образом, сумма цифр числа M равна $518 \cdot 2-9k = 1036-9k$, а сумма цифр числа $2M$ равна $(1036-9k) \cdot 2-9k = 2072-27k = 2018$. Отсюда $27k = 54$ и $k = 2$, что и даёт ответ.

Задача 6. *По клеткам таблицы 1526×1526 ползает черепашка, которая умеет переползать из клетки в соседнюю с ней по стороне. Она начинает свой маршрут в угловой клетке, посещает каждую клетку ровно один раз и возвращается в ту же клетку, с которой начала. При каком наибольшем k заведомо найдётся строка или столбец, куда черепашка заползала (из соседних рядов) не менее k раз?*

Ответ. При $k = 764$. Решение. Обозначим $n = 1526$. Всего черепашка сделает n^2 переходов. Каждый переход является переходом либо в новую строку, либо в новый столбец. Всего столбцов и строк суммарно $2n$, значит, по принципу Дирихле, найдется строка или столбец, в которую черепашка заползет не менее $n^2/2n = n/2$ раз. При этом строки, в которую черепашка заползет более $n/2$ раз не найдется только в случае, когда в каждую строку и в каждый столбец черепашка заползала ровно $n/2$ раз. Покажем, что такого не бывает. Предположим противное. Пусть черепашка начинает свой путь в верхней угловой клетке. Рассмотрим в нижнюю строку. В нее черепашка заползает ровно $n/2$ раз. Заметим, что тогда она ровно $n/2$ раз выползет из нижней строки в предпоследнюю строчку. Но еще черепашка обязательно хотя бы раз переползала из предпредпоследней строки в предпоследнюю, значит, в предпоследнюю строку черепашка переползала хотя бы $n/2+1$ раз — противоречие. Это дает нам оценку на k, равную $1526:2+1 = 764$. *Пример* схемы обхода, в котором бóльшие k не подходят, приведен на рисунке. Отметим, что подобный обход возможен для любой доски размера $(4k–2)\times(4k–2)$.



Задача 7. *Точки D, E, F — середины сторон BC, AB и AC треугольника ABC соответственно. Биссектриса угла ADB пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла ADC пересекает сторону AC в точке N. Прямые AD и MN пересекаются в точке O, прямые AB и FO — в точке P, а прямые AC и EO — в точке R. Докажите, что PR = AD.*

Решение. Проведём через точку R прямую, параллельную прямой BC, до пересечения с отрезком AB в точке P_1. Мы хотим доказать, что $P_1 = P$. Поскольку EF — средняя линия треугольника ABC, то $EF \parallel BC \parallel P_1R$, т.е $EFRP_1$ — трапеция. Вспомним теперь, что середины оснований трапеции, точка пересечения продолжения боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой и, в случае нашей трапеции, медиана AD является этой прямой! Но тогда точка $O = AD \cap RE$ является точкой пересечения диагоналей трапеции, откуда F, O и P_1 лежат на одной прямой и $P_1 = P$. Итак, $RP \parallel BC$.

По свойству биссектрисы треугольника имеем $\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AN}{NC}$, откуда по теореме, обратной теореме Фалеса, получаем $MN \parallel BC$. Следовательно, $\angle OND = \angle NDC = \angle NDO$, треугольник OND равнобедренный, $OD = ON$. Из подобия треугольников FON и FPR ($ON \parallel PR$) имеем $\frac{ON}{PR} = \frac{OF}{FP}$. Из подобия треугольников OFD и OPA ($DF \parallel AB$) имеем $\frac{OD}{AO} = \frac{OF}{OP}$, откуда по свойству пропорций $\frac{OD}{AD} = \frac{OF}{FP}$. Следовательно, $\frac{OD}{AD} = \frac{ON}{PR}$, откуда $AD = PR$.

Задача 8. *Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, все члены которой различны, такая, что при каждом натуральном k число $2^k a_1a_2\ldots a_k$ делится на a_{k+1}^k?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть простое число $p \geq 3$ входит в разложение числа a_1 на простые множители в степени n. Тогда во все a_k оно входит в степени, не большей n. В самом деле, пусть k — первый из номеров, при которых a_{k+1} делится на p^{n+1}. Тогда a_{k+1}^k делится на $p^{k(n+1)}$, а $2^k a_1a_2\ldots a_k$ — не более чем на p^{kn} — противоречие. Значит, каждое a_k является произведением числа, не большего a_1, на некоторую степень двойки $2^{f(k)}$. Пусть нашлось такое k, что $f(k+1)$ больше $f(i)$ для всех $i \leq k$. Тогда a_{k+1}^k делится на $2^{kf(k+1)}$. Заметим, что при этом степень двойки в разложении на простые множители числа $2^k a_1a_2\ldots a_k$ не превосходит $2^{kf(k+1)}$, причем максимум достигается только в случае, когда $f(i) = f(k+1)–1$ при всех $i \leq k$. Из этого следует, что $f(k) \leq f(1)+1$ при любом k. Таким образом, $a_k \leq 2a_1$ при всех k, и все члены последовательности не могут быть различными.