МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовём *суперсоставным*, если каждый его простой делитель меньше $\sqrt{n}$. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных суперсоставных чисел.

2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Точка D на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно BC, такова, что $AD = BC$. Чему может быть равен угол BAD?

3. Докажите, что каждое натуральное число n, большее 1, можно записать в виде произведения r различных чисел вида $1+1/k$ с натуральными k для каждого $r \geq n-1$.

4. Отрезок разбит на 100 равных отрезочков, внутри каждого отметили по точке. Для каждых двух соседних отрезочков нашли расстояние между отмеченными в них точками. Все 99 полученных расстояний оказались целыми, причём расстояние между первой и второй точками (считая слева) равно 2, а между второй и третьей — 6. Докажите, что какое–то расстояние, большее 1, встречается среди найденных 99 расстояний хотя бы 7 раз.

5. В каждую клетку таблицы 10×10 изначально записано число 0. Двое игроков делают ходы по очереди. За ход можно прибавить по 1 ко всем числам любой строки или любого столбца. Каждый делает по 10 ходов. После этого второй игрок платит первому столько рублей, сколько в этот момент в таблице чётных чисел. Найдите наибольшую сумму, которую сумеет заработать первый, как бы второй ни старался сэкономить.

6. Среди 100 жителей городка Сен-Сан трое мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Пытаясь вывести мафию на чистую воду, комиссар попросил каждого из жителей назвать трех подозреваемых (из оставшихся 99). Комиссару известно, что ни один из мафиозо не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал хотя бы двоих мафиози. Какое наибольшее количество мафиози комиссар заведомо сумеет определить по этим данным?

7. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Докажите, что при каждом натуральном k число $a_{(k+1)!} - a_{k!}$ делится на k.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = CD > BC$ и $\angle ABD = \angle CBD$. Докажите, что $AD > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовём *суперсоставным*, если каждый его простой делитель меньше $\sqrt{n}$. Докажите, что существует бесконечно много пар последовательных суперсоставных чисел.

2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Точка D на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно BC, такова, что $AD = BC$. Чему может быть равен угол BAD?

3. Докажите, что каждое натуральное число n, большее 1, можно записать в виде произведения r различных чисел вида $1+1/k$ с натуральными k для каждого $r \geq n-1$.

4. Отрезок разбит на 100 равных отрезочков, внутри каждого отметили по точке. Для каждых двух соседних отрезочков нашли расстояние между отмеченными в них точками. Все 99 полученных расстояний оказались целыми, причём расстояние между первой и второй точками (считая слева) равно 2, а между второй и третьей — 6. Докажите, что какое–то расстояние, большее 1, встречается среди найденных 99 расстояний хотя бы 4 раза.

5. В каждую клетку таблицы 10×10 изначально записано число 0. Двое игроков делают ходы по очереди. За ход можно прибавить по 1 ко всем числам любой строки или любого столбца. Каждый делает по 10 ходов. После этого второй игрок платит первому столько рублей, сколько в этот момент в таблице чётных чисел. Найдите наибольшую сумму, которую сумеет заработать первый, как бы второй ни старался сэкономить.

6. Среди 100 жителей городка Сен-Сан трое мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Пытаясь вывести мафию на чистую воду, комиссар попросил каждого из жителей назвать трех подозреваемых (из оставшихся 99). Комиссару известно, что ни один из мафиозо не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал хотя бы двоих мафиози. Может ли комиссар по этим данным гарантированно определить хотя бы одного мафиозо?

7. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство $(x^2+4)(y^2+4) \geq 2x(y^2+4)+2y(x^2+4)$.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = CD > BC$ и $\angle ABD = \angle CBD$. Докажите, что $AD > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовём *суперсоставным*, если каждый его простой делитель меньше $\sqrt{n}$. Докажите, что существует бесконечно много пар последовательных суперсоставных чисел.

2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Точка D на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно BC, такова, что $AD = BC$. Чему может быть равен угол BAD?

3. Докажите, что каждое натуральное число n, большее 1, можно записать в виде произведения r чисел вида $1+1/k$ (не обязательно различных) для каждого $r \geq n-1$.

4. Отрезок разбит на 100 равных отрезочков, внутри каждого из которых отметили по точке. Для каждых двух соседних отрезочков нашли расстояние между отмеченными в них точками. Расстояние между первой и второй точками (считая слева) равно 6. Докажите, что хотя бы 49 из найденных 99 расстояний превосходят 1.

5. В каждую клетку таблицы 100×100 изначально записано число 0. Двое играют в игру, по очереди делая по 100 ходов. За ход можно прибавить по 1 ко всем числам любой строки или любого столбца. В конце игры считается, сколько на доске четных чисел. Может ли первый играть так, чтобы независимо от игры второго их оказалось более 95%?

6. Среди ста жителей городка Сен-Севилья трое мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать двоих подозреваемых (из оставшихся 99). Каждый мирный житель назвал двоих мафиози. Докажите, что комиссар на основании этих данных может определить хотя бы одного мафиозо.

7. Натуральные числа a, b, c, k, l, m таковы, что $\dfrac{a+c+abc}{bc+1}=\dfrac{k+m+klm}{lm+1}$. Докажите, что тогда $a = k$, $b = l$ и $c = m$.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = CD > BC$ и $\angle ABD = \angle CBD$. Докажите, что $AD > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовём *суперсоставным*, если каждый его простой делитель меньше $\sqrt{n}$. Докажите, что существует бесконечно много пар последовательных суперсоставных чисел.

2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Точка D на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно BC, такова, что $AD = BC$. Чему может быть равен угол BAD?

3. Докажите, что для каждого $r > 1$ число 3 можно записать в виде произведения r чисел вида $1+1/k$ (не обязательно различных).

4. Отрезок разбит на 100 равных отрезочков, внутри каждого из которых отметили по точке. Для каждых двух соседних отрезочков нашли расстояние между отмеченными в них точками. Расстояние между первой и второй точками (считая слева) равно 6. Докажите, что хотя бы 49 из найденных 99 расстояний превосходят 1.

5. В каждую клетку таблицы 100×100 изначально записано число 0. Двое играют в игру, по очереди делая по 100 ходов. За ход можно прибавить по 1 ко всем числам любой строки или любого столбца. В конце игры считается, сколько на доске четных чисел. Может ли первый играть так, чтобы их чтобы независимо от игры второго оказалось более 95%?

6. Среди ста жителей городка Сен-Севилья трое мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать двоих подозреваемых (из оставшихся 99). Каждый мирный житель назвал двоих мафиози. Докажите, что комиссар на основании этих данных может определить хотя бы одного мафиозо.

7. Натуральные числа a, b, c, k, l, m таковы, что $\dfrac{a+c+abc}{bc+1} = \dfrac{k+m+klm}{lm+1}$. Докажите, что тогда $a = k$, $b = l$ и $c = m$.

8. Дан луч с вершиной O. Из точки O провели еще 9 лучей, которые образуют с исходным лучом острые углы. Могло ли случиться, что среди углов, образованных этими 10 лучами, тупых углов ровно столько же, сколько и острых?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Клетчатый квадрат 11×11 требуется по клеточкам разрезать на пять прямоугольников так, чтобы один из них не содержал клеток, лежащих на краю исходного квадрата. Сколькими различными способами можно это сделать? (Исходный квадрат поворачивать и переворачивать нельзя).

2. Найдите все натуральные n, для которых числа $5n-1$ и $13n-1$ являются точными квадратами, а число $7n-3$ — простое.

3. Среди ста жителей городка Сен-Севилья десять мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать десятерых подозреваемых (из оставшихся 99). Ни один из мафиози не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал хотя бы шестерых мафиози. Может ли комиссар, зная всё это, гарантированно определить троих мафиози?

4. Дан луч с вершиной O. Из точки O проведены ещё 99 лучей, которые образуют с исходным лучом острые углы. Может ли так случиться, что среди углов, образованных этими 100 лучами, тупых углов ровно столько же, сколько и острых?

5. Натуральные числа от 1 до 2016 разбиты на 20 групп. При каком наибольшем натуральном k можно утверждать, что в любом таком разбиении найдется группа, произведение чисел в которой делится на 10^k?

6. Серёжа покрасил два столбца и две строки доски 100×100 в синий цвет. Затем он вырезал из доски 2222 клетки так, что из каждой синей строки и из каждого синего столбца вырезано по нечётному количеству клеток, а из всех остальных столбцов и строк — по чётному. Оставшуюся часть доски удалось разбить на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток). Может ли прямоугольник, образованный синими строчками и столбцами, быть квадратом?

7. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство $(x^2+4)(y^2+4) \geq 2x(y^2+4)+2y(x^2+4)$.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = CD > BC$ и $\angle ABD = \angle CBD$. Докажите, что $AD > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Клетчатый квадрат 11×11 требуется по клеточкам разрезать на пять прямоугольников так, чтобы один из них не содержал клеток, лежащих на краю исходного квадрата. Сколькими различными способами можно это сделать? (Исходный квадрат поворачивать и переворачивать нельзя).

2. На доске написано десятизначное число n, в котором нет нулей. Вася записал 74 числа, каждое из которых можно получить из числа n вычёркиванием трёх цифр. Могло ли так случиться, что все записанные Васей числа дают различные остатки от деления на 74?

3. Среди ста жителей городка Сен-Севилья десять мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать десятерых подозреваемых (из оставшихся 99). Ни один из мафиози не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал хотя бы семерых мафиози. Может ли комиссар, зная всё это, гарантированно определить всех мафиози?

4. Дан луч с вершиной O. Из точки O проведены ещё 99 лучей, которые образуют с исходным лучом острые углы. Может ли так случиться, что среди углов, образованных этими 100 лучами, тупых углов ровно столько же, сколько и острых?

5. Натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на 20 групп. Докажите, что произведение чисел в какой-то из групп делится на 1 000 000.

6. Из доски 100×100 вырезали 2222 клетки, причём в крайних столбцах и строках вырезано по нечётному количеству клеток, а во всех остальных столбцах и строках — по чётному. Докажите, что оставшуюся часть доски нельзя разрезать на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток).

7. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство $(x^2+4)(y^2+4) \geq 2x(y^2+4)+2y(x^2+4)$.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = CD > BC$ и $\angle ABD = \angle CBD$. Докажите, что $AD > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Клетчатый квадрат 11×11 требуется по клеточкам разрезать на пять прямоугольников так, чтобы один из них не содержал клеток, лежащих на краю исходного квадрата. Сколькими различными способами можно это сделать? (Исходный квадрат поворачивать и переворачивать нельзя).

2. На доске написано семизначное число n, в котором нет нулей. Вася записал 14 чисел, каждое из которых можно получить из числа n вычёркиванием двух цифр. Могло ли так случиться, что все записанные Васей числа дают различные остатки от деления на 14?

3. Среди ста жителей городка Сен-Севилья шестеро мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать десятерых подозреваемых (из оставшихся 99). Ни один из мафиози не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал всех шестерых мафиози в числе подозреваемых. Может ли комиссар, зная всё это, гарантированно определить всех мафиози?

4. Дан угол с вершиной O величины $100°$. Внутри этого угла проведено 10 лучей. Может ли так случиться, что среди углов, образованных этими 10 лучами, тупых углов ровно столько же, сколько и острых?

5. Натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на 20 групп. Докажите, что произведение чисел в какой-то из групп делится на 1 000 000.

6. Назовём натуральное число *особым*, если оно равно разности двух степеней двойки. Найдите хотя бы одно особое число n такое, что числа $n-1000$ и $n-2000$ — тоже особые.

7. Отрезок разбит на 100 равных отрезочков, внутри каждого отмечено по точке. Посчитали все 99 расстояний между соседними отмеченными точками. Оказалось, что все они целые, причём первое равно 1, а второе — 3. Докажите, что какое-то расстояние встречается хотя бы 15 раз.

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями, если $\angle BAC = \angle CBD$, $\angle ACD = \angle BDA$ и $\angle ABC+\angle ADC = 200°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли разрезать прямоугольник 99×100 на прямоугольники площадей 1, 2, 4, 8 так, чтобы никакие прямоугольники одинаковой площади не соприкасались?

2. На доске написано семизначное число n, в котором нет нулей. Вася записал 14 чисел, каждое из которых можно получить из числа n вычёркиванием двух цифр. Могло ли так случиться, что все записанные Васей числа дают различные остатки от деления на 14?

3. Среди ста жителей городка Сен-Севилья трое мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать двоих подозреваемых (из оставшихся 99). Каждый мирный житель назвал двоих мафиози. Докажите, что комиссар на основании этих данных сможет определить хотя бы одного мафиозо?

4. Дан угол с вершиной O величины 100°. Внутри этого угла проведено 10 лучей. Может ли так случиться, что среди углов, образованных этими 10 лучами, тупых углов ровно столько же, сколько и острых?

5. Натуральные числа от 1 до 100 разбиты на 5 групп. Докажите, что произведение чисел в какой-то из групп делится на 1000.

6. Петя Петухов весь январь готовился к математической олимпиаде. При этом он решал от одной до шести задач в день. Петя утверждает, что за все понедельники он решил на 25 задач больше, чем за все среды, а за все четверги на 25 задач больше, чем за все субботы. Не перепутал ли Петя?

7. Отрезок разбит на 10 равных отрезочков, внутри каждого отмечено по точке. Посчитали все 9 расстояний между соседними отмеченными точками. Оказалось, что первое равно 1, а второе — 3. Может ли последнее расстояние равняться 10?

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями, если $\angle BAC = \angle CBD$, $\angle ACD = \angle BDA$ и $\angle ABC + \angle ADC = 200°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на 20 групп. Докажите, что произведение чисел в какой-то из групп делится на 1 000 000.

2. Среди ста жителей городка Сен-Севилья десять мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать десятерых подозреваемых (из оставшихся 99). Ни один из мафиози не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал хотя бы семерых мафиози. Может ли комиссар, зная всё это, гарантированно определить всех мафиози?

3. Число назовём *хорошим*, если его можно представить в виде $1+1/k$, где k — некоторое натуральное число. Докажите, что каждое натуральное $n > 1$ можно записать в виде произведения n различных хороших чисел.

4. Из доски 100×100 вырезали 2222 клетки, причём в крайних столбцах и строках вырезано по нечётному количеству клеток, а во всех остальных столбцах и строках — по чётному. Докажите, что оставшуюся часть доски нельзя разрезать на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток).

5. Назовём натуральное число *особым*, если оно равно разности двух степеней двойки. Найдите хотя бы одно особое число n такое, что числа $n-1000$ и $n-2000$ — тоже особые.

6. На доске написано десятизначное число n, в котором нет нулей. Вася записал 74 числа, каждое из которых можно получить из числа n вычёркиванием трёх цифр. Могло ли так случиться, что все записанные Васей числа дают различные остатки от деления на 74?

7. По прямой прыгает кузнечик, а его ловит охотник. Кузнечик прыгает 10 раз подряд: первый прыжок — на 100 см в любую сторону, следующий — на 101 см, …, десятый — на 109 см. Перед каждым прыжком кузнечика охотник ставит ловушку в любую точку прямой (но не туда, где сейчас находится кузнечик). Охотник хочет, чтобы кузнечик прыгнул в ловушку. Всегда ли он сможет добиться своего?

8. Клетчатый квадрат 11×11 требуется по клеточкам разрезать на пять прямоугольников так, чтобы один из них не содержал клеток, лежащих на краю исходного квадрата. Сколькими различными способами можно это сделать? (Исходный квадрат поворачивать и переворачивать нельзя).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на 20 групп. Докажите, что произведение чисел в какой-то из групп делится на 1 000 000.

2. Среди ста жителей городка Сен-Севилья шестеро мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать десятерых подозреваемых (из оставшихся 99). Ни один из мафиози не назвал других мафиози, зато каждый мирный житель назвал всех шестерых мафиози в качестве подозреваемых. Может ли комиссар, зная всё это, гарантированно определить всех мафиози?

3. Дан угол с вершиной O величины 100°. Внутри этого угла проведено 10 лучей. Может ли так случиться, что среди углов, образованных этими 10 лучами, тупых углов ровно столько же, сколько и острых?

4. Из доски 100×100 вырезали 2222 клетки, причём в крайних столбцах и строках вырезано по нечётному количеству клеток, а во всех остальных столбцах и строках — по чётному. Докажите, что оставшуюся часть доски нельзя разрезать на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток).

5. Назовём натуральное число *особым*, если оно равно разности двух степеней двойки. Найдите хотя бы одно особое число n такое, что числа $n-1000$ и $n-2000$ — тоже особые.

6. На доске написано семизначное число n, в котором нет нулей. Вася записал 14 чисел, каждое из которых можно получить из числа n вычёркиванием двух цифр. Могло ли так случиться, что все записанные Васей числа дают различные остатки от деления на 14?

7. По прямой прыгает кузнечик, а его ловит охотник. Кузнечик прыгает 10 раз подряд: первый прыжок — на 100 см в любую сторону, следующий — на 101 см, …, десятый — на 109 см. Перед каждым прыжком кузнечика охотник ставит ловушку в любую точку прямой (но не туда, где сейчас находится кузнечик). Охотник хочет, чтобы кузнечик прыгнул в ловушку. Всегда ли он сможет добиться своего?

8. Отрезок разбит на 100 равных отрезочков, внутри каждого отмечено по точке. Посчитали все 99 расстояний между соседними отмеченными точками. Оказалось, что все они целые, причём первое равно 1, а второе — 3. Докажите, что какое-то расстояние встречается хотя бы 15 раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.11.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Велосипедисты Иванов и Петров выехали одновременно из пункта A в пункт B, расстояние между которыми составляет 200 км. Первые два часа Иванов ехал со скоростью 60 км/час, а Петров со скоростью 15 км/час. Всё оставшееся время Петров ехал со скоростью 60 км/час, а Иванов со скоростью 15 км/час. Сколько времени прошло между первым моментом, в который расстояние между велосипедистами составляло 15 км, и последним таким моментом?

2. Петя Петухов весь январь готовился к математической олимпиаде. При этом он решал от одной до шести задач в день. Петя утверждает, что за все понедельники он решил на 25 задач больше, чем за все среды, а за все четверги на 25 задач больше, чем за все субботы. Не перепутал ли Петя?

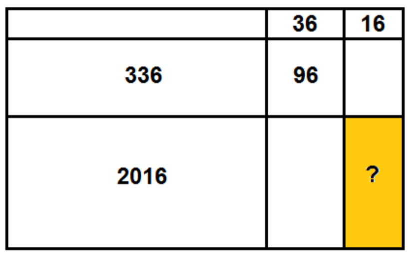
3. Натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на 20 групп. Докажите, что произведение чисел в какой-то из групп делится на 1 000 000.

4. Можно ли разрезать прямоугольник 99×100 на прямоугольники площадей 1, 2, 4, 8 так, чтобы никакие прямоугольники одинаковой площади не соприкасались?

5. У Васи есть две ручки. Одна пишет синим цветом, другая – чёрным. Он хочет написать пять чисел 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы разность любых двух чисел, написанных чернилами одного цвета, была написана чернилами другого цвета. Сможет ли он это сделать?

6. Отрезок разбит на 10 равных отрезочков, внутри каждого отмечено по точке. Посчитали все 9 расстояний между соседними отмеченными точками. Оказалось, что первое равно 1, а второе — 3. Может ли последнее расстояние равняться 10?

7. Прямоугольник разделили на 9 прямоугольников. Найдите площадь закрашенного прямоугольника, если известны значения площадей у пяти прямоугольников, указанные на рисунке.



8. Среди ста жителей городка Сен-Севилья трое мафиози, а остальные жители — мирные. В город приехал комиссар, которому это известно. Комиссар попросил каждого из жителей назвать двоих подозреваемых (из оставшихся 99). Каждый мирный житель назвал двоих мафиози. Докажите, что комиссар на основании этих данных может определить хотя бы одного мафиозо.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Все натуральные делители числа n удалось разбить на пары так, что сумма делителей в каждой паре — простое число. Докажите, что все эти простые числа различны.

2. Квадрат разбит на квадратики (не обязательно равные). Докажите, что эти квадратики можно покрасить в 8 цветов так, чтобы любые два квадратика, имеющие хотя бы одну общую точку, были разных цветов.

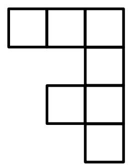
3. Докажите, что для любых вещественных чисел x и $y > x$ выполнено неравенство $x+\sqrt[16]{y^{16}+16} < y+\sqrt[16]{x^{16}+16}$.

4. В 101-элементном множестве выбрано 2^{51} различных подмножеств. Докажите, что существуют три выбранных подмножества, одно из которых содержится в объединении двух других.

5. Отрезки AD и BE — высоты остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка AB. Точки P и Q симметричны точке M относительно прямых AD и BE соответственно. Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой PQ.

6. Точка M на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC такова, что $\angle AMB = 75°$. На биссектрисе угла MAC отмечена точка F такая, что $BF = AB$. Докажите, что треугольник CFM равнобедренный.

7. Докажите, что из доски 705×705 можно вырезать 70000 *семёрок* вида, показанного на рисунке справа. (Семёрки можно поворачивать и переворачивать.)



8. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e делятся на p. Докажите, что и число $ae-d$ делится на p.

XLVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ТЮМЕНЬ, 25.11–01.12.2016

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Все натуральные делители числа n удалось разбить на пары так, что сумма делителей в каждой паре — простое число. Докажите, что все эти простые числа различны.

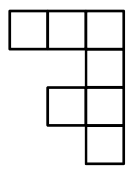
2. Квадрат разбит на квадратики (не обязательно равные). Докажите, что эти квадратики можно покрасить в 9 цветов так, чтобы любые два квадратика, имеющие хотя бы одну общую точку, были разных цветов.

3. Докажите, что для любых вещественных чисел $x > 0$ и $y > x$ выполнено неравенство $x+\sqrt[4]{y^4+4} < y+\sqrt[4]{x^4+4}$.

4. На олимпиаде было 3 задачи, решение каждой из которых оценивалось целым числом баллов от 0 до 7. Известно, что у любых двоих участников баллы совпали не более чем по одной задаче. Найдите наибольшее возможное количество участников.

5. Отрезки AD и BE — высоты остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка AB. Точки P и Q симметричны точке M относительно прямых AD и BE соответственно. Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой PQ.

6. Точка M на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC такова, что $\angle AMB = 75°$. На биссектрисе угла MAC отмечена точка F такая, что $BF = AB$. Докажите, что треугольник CFM равнобедренный.



7. Докажите, что из доски 777×777 можно вырезать 77777 *семёрок* вида, показанного на рисунке справа. (Семёрки можно поворачивать и переворачивать.)

8. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e делятся на p. Докажите, что и число $ae-d$ делится на p.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Все натуральные делители числа n удалось разбить на пары так, что сумма делителей в каждой паре — простое число. Докажите, что все эти простые числа различны.

2. Дима и Саша играют в игру на доске 9×9, клетки которой изначально пусты. Ходят по очереди, начинает Дима. Каждым своим ходом Дима пишет в любую пустую клетку 0. Саша каждым своим ходом пишет k единиц в любые k пустых клеток. Саша выигрывает, если в некоторый момент игры суммы чисел во всех строках и во всех столбцах оказались нечетными. Если такого не случилось ни разу, то выигрывает Дима. При каком наименьшем k Саша может обеспечить себе победу, как бы ни играл Дима?

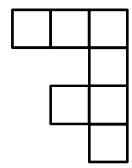
3. Докажите, что для любых вещественных чисел $x > 0$ и $y > x$ выполнено неравенство $x+\sqrt[4]{y^4+4} < y+\sqrt[4]{x^4+4}$.

4. На олимпиаде было 3 задачи, решение каждой из которых оценивалось целым числом баллов от 0 до 7. Известно, что у любых двух участников баллы совпали не более чем по одной задаче. Найдите наибольшее возможное количество участников.

5. Секретный объект представляет собой треугольник ABC, у которого сторона AB равна 6 км. Из вершин A и B в направлении вершины C выбегают две собаки (возможно, с разными скоростями) и обегают контур секретного объекта. Первый раз они встречаются в вершине C, второй раз они встречаются в вершине A, и в третий раз — в вершине B. Найдите длину стороны AC.

6. Точка M на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC такова, что $\angle AMB = 75°$. На биссектрисе угла MAC отмечена точка F такая, что $BF = AB$. Докажите, что треугольник CFM равнобедренный.

7. Докажите, что из доски 777×777 можно вырезать 77777 *семёрок* вида, показанного на рисунке справа. (Семёрки можно поворачивать и переворачивать.)



8. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e делятся на p. Докажите, что и число $ae-d$ делится на p.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Первая цифра пятизначного числа равна остатку от деления этого числа на 2, вторая — остатку от деления этого числа на 3, третья — остатку от деления этого числа на 4, четвёртая — остатку от деления этого числа на 5, пятая — остатку от деления этого числа на 6. Найдите все такие числа. Напомним, что первая цифра числа не может быть нулём.

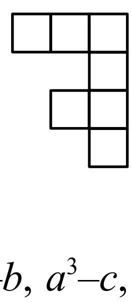
2. Дима и Саша играют в игру на доске 6×6, клетки которой изначально пусты. Ходят по очереди, начинает Дима. Каждым своим ходом Дима пишет в любую пустую клетку 0, а Саша пишет по единице в любые две пустые клетки. Саша выигрывает, если в некоторый момент игры суммы чисел во всех строках и во всех столбцах оказались нечетными. Если такого не случилось ни разу, то выигрывает Дима. Докажите, что Саша сможет обеспечить себе победу.

3. В таблице 5×5 расставлены числа так, что: 1) в каждом ряду (то есть строке или столбце из 5 клеток) есть не равные между собой числа; 2) число в средней клетке каждого ряда равно среднему арифметическому остальных чисел в этом ряду. Какое наименьшее количество чисел, меньших числа в центральной клетке квадрата, может быть в этой таблице?

4. На олимпиаде было 3 задачи, решение каждой из которых оценивалось целым числом баллов от 0 до 7. Известно, что у любых двух участников баллы совпали не более чем по одной задаче. Найдите наибольшее возможное количество участников.

5. Отрезки AD и BE — высоты остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка AB. Точки P и Q симметричны точке M относительно прямых AD и BE соответственно. Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой PQ.

6. Секретный объект представляет собой треугольник ABC, у которого сторона AB равна 6 км. Из вершин A и B в направлении вершины C выбегают две собаки (возможно, с разными скоростями) и обегают контур секретного объекта. Первый раз они встречаются в вершине C, второй раз они встречаются в вершине A, и в третий раз — в вершине B. Найдите длину стороны AC.



7. Докажите, что из доски 777×777 можно вырезать 77777 *семёрок* вида, показанного на рисунке справа. (Семёрки можно поворачивать и переворачивать.)

8. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e делятся на p. Докажите, что и число $ae-d$ делится на p.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каждая клетка таблицы 8×9 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Какое наибольшее число зеленых клеток может быть в такой таблице?

2. В Джинистане продают бутылки тархуна и принимают пустые бутылки, причём как пустая, так и полная бутылки стоят натуральное число тугриков. Оказалось, что за 56 пустых бутылок не получится без доплаты получить 13 полных, зато если принести 13 пустых, то за них отдадут 3 полных, да ещё и сдачу дадут. Какое наименьшее число тугриков может стоить пустая бутылка?

3. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 4000. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, увеличить результат на единицу и записать на доску получившееся в итоге число вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 12 и 29 можно записать 2913 или 1230. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Может ли это число быть кубом натурального числа?

4. Девять школьников образовали несколько клубов. В каждый клуб входят ровно трое школьников, и для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Каково наибольшее возможное количество клубов?

5. На столе стоят 50 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 51 г, 52 г, 53 г, …, 100 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире. Весы покажут, какая гиря тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает k граммов, иначе весы покажут равенство. При каком наибольшем натуральном k с помощью таких весов можно с гарантией узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

6. Квадрат разбит на квадратики (не обязательно одинаковые). Докажите, что эти квадратики можно покрасить в девять цветов так, чтобы любые два квадратика, имеющие хотя бы одну общую точку, были разных цветов.

7. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7. Докажите, что $(a_1-a_2)^4+(a_2-a_3)^4+(a_3-a_4)^4+(a_4-a_5)^4+(a_5-a_6)^4+(a_6-a_7)^4+(a_7-a_1)^4\geq 82$.

8. Точка N — середина стороны BC треугольника ABC. На стороне AC этого треугольника отмечена точка K, так, что $\angle BAC=2\angle NKC$. Докажите, что $KC = BA+AK$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каждая клетка таблицы 8×9 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Какое наименьшее число зеленых клеток может быть в такой таблице?

2. В Джинистане продают бутылки тархуна и принимают пустые бутылки, причём как пустая, так и полная бутылки стоят натуральное число тугриков. Оказалось, что за 56 пустых бутылок не получится без доплаты получить 13 полных, зато если принести 13 пустых, то за них отдадут 3 полных, да ещё и сдачу дадут. Какое наименьшее число тугриков может стоить пустая бутылка?

3. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 4000. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, увеличить результат на единицу и записать на доску получившееся в итоге число вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 12 и 29 можно записать 2913 или 1230. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Может ли это число быть кубом натурального числа?

4. Пятнадцать школьников образовали несколько клубов. В каждый клуб входят ровно трое школьников, и для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Докажите, что клубов не больше 35.

5. На столе стоят 50 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 51 г, 52 г, 53 г, …, 100 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире. Весы покажут, какая гиря тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает k граммов, иначе весы покажут равенство. При каком наибольшем натуральном k с помощью таких весов можно с гарантией узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

6. Квадрат разбит на меньшие квадраты (не обязательно одинаковые). Всегда ли квадраты разбиения можно покрасить в три цвета таким образом, чтобы любые два квадрата, имеющие общий участок границы, были окрашены в разные цвета?

7. Даны различные натуральные числа a, b, c и d. Докажите неравенство $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \geq 20$.

8. Точка N — середина стороны BC треугольника ABC. На стороне AC этого треугольника отмечена точка K, так, что $\angle BAC = 2\angle NKC$. Докажите, что $KC = BA + AK$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каждая клетка таблицы 7×8 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Возможна ли такая раскраска, и если да, то сколько в ней может быть зеленых клеток?

2. На занятии математического кружка преподаватель раздал ученикам девять карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на одной карточке). Петя расставляет карточки в произвольном порядке, а Вася находит сумму всевозможных двузначных чисел, составленных из двух цифр, стоящих рядом. Например, если Петя расставит карточки 1–3–5–7–9–2–4–6–8, то у Васи получится число $13+35+57+79+92+24+46+68 = 414$. Найдите разницу между самым большим и самым маленьким числом, которое может получиться у Васи.

3. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 50. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, уменьшить результат на единицу и записать на доску получившееся в итоге число вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 12 и 30 можно записать 3011 или 1229. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Может ли это число быть квадратом натурального числа?

4. Пятнадцать школьников образовали несколько клубов. В каждый клуб входят ровно трое школьников, и для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Докажите, что клубов не больше 35.

5. На столе стоят 20 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 21 г, 22 г, 23 г, …, 40 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире, и весы покажут, какая тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает восемь граммов, иначе весы покажут равенство. Как с помощью таких весов можно узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

6. Квадрат разбит на меньшие квадраты (не обязательно одинаковые). Всегда ли квадраты разбиения можно покрасить в три цвета таким образом, чтобы любые два квадрата, имеющие общий участок границы, были окрашены в разные цвета?

7. Даны различные натуральные числа a, b, c и d. Докажите неравенство $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \geq 20$.

8. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отметили такие точки K и M, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каждая клетка таблицы 7×7 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Возможна ли такая раскраска, и если да, то сколько в ней может быть зеленых клеток?

2. На занятии математического кружка преподаватель раздал ученикам девять карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на одной карточке). Петя расставляет карточки в произвольном порядке, а Вася находит сумму всевозможных двузначных чисел, составленных из двух цифр, стоящих рядом. Например, если Петя расставит карточки 1–3–5–7–9–2–4–6–8, то у Васи получится число 13+35+57+79+92+24+46+68 = 414. Найдите разницу между самым большим и самым маленьким числом, которое может получиться у Васи.

3. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, 4. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, увеличить результат на единицу и записать на доску получившееся в итоге число вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 12 и 29 можно записать 2913 или 1230. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Может ли это число быть квадратом натурального числа?

4. На большом листе бумаги прыгают две очень маленькие блохи. Первый прыжок блохи делают по прямой навстречу друг другу (возможно, их прыжки имеют разную длину). Первая блоха сначала прыгает вправо, потом вверх, потом влево, потом вниз, потом снова вправо и т.д. При этом каждый прыжок у неё на 1 см длиннее предыдущего. Вторая блоха сначала прыгает влево, потом вверх, потом вправо, потом вниз, потом снова влево и т.д. И каждый следующий прыжок у неё тоже на 1 см длиннее предыдущего. Через 100 прыжков блохи оказались на расстоянии 3 метров друг от друга. На каком расстоянии друг от друга находились блохи первоначально?

5. На столе стоят 20 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 21 г, 22 г, 23 г, …, 40 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире, и весы покажут, какая тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает восемь граммов, иначе весы покажут равенство. Как с помощью таких весов можно узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

6. Первая цифра пятизначного числа равна остатку от деления этого числа на 2, вторая — остатку от деления этого числа на 3, третья — остатку от деления этого числа на 4, четвёртая — остатку от деления этого числа на 5, пятая — остатку от деления этого числа на 6. Найдите все такие числа. Напомним, что первая цифра числа не может быть нулём.

7. Даны различные натуральные чисел a, b и c. Докажите, что $(a–b)^2+(a–c)^2+(b–c)^2 \geq 6$.

8. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отметили такие точки K и M, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке квадратной таблицы 5×5 стоит натуральное число. За один ход можно брать любую клетку и ко всем числам, стоящим в соседних с ней по стороне клетках, прибавлять единицу. Всегда ли за несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой все числа, стоящие в граничных клетках, делятся на 3? (Клетка называется граничной, если у неё есть сторона на границе таблицы).

2. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 50. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, уменьшить результат на единицу и записать на доску получившееся в итоге вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 12 и 30 можно записать 3011 или 1229. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Может ли это число быть квадратом натурального числа?

3. В Джинистане продают бутылки тархуна и принимают пустые бутылки, причём как пустая, так и полная бутылки стоят натуральное число тугриков. Оказалось, что за 56 пустых бутылок не получится без доплаты получить 13 полных, зато если принести 13 пустых, то за них отдадут 3 полных, да ещё и сдачу дадут. Какое наименьшее число тугриков может стоить пустая бутылка?

4. Девять школьников образовали несколько клубов. В каждый клуб входят ровно трое школьников, и для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Каково наибольшее возможное количество клубов?

5. На занятии математического кружка преподаватель раздал ученикам восемнадцать карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на двух карточках). Петя расставляет все 18 карточек в ряд в произвольном порядке и находит сумму всех пятнадцати четырёхзначных чисел, составленных из четвёрок цифр, стоящих подряд. Помогите Пете расставить карточки в таком порядке, чтобы получившаяся сумма была максимальна.

6. Квадрат разбит на меньшие квадраты (не обязательно одинаковые). Всегда ли квадраты разбиения можно покрасить в три цвета таким образом, чтобы любые два квадрата, имеющие общий отрезок границы, были окрашены в разные цвета?

7. На столе стоят 50 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 51 г, 52 г, 53 г, …, 100 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире. Весы покажут, какая гиря тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает k граммов, иначе весы покажут равенство. При каком наибольшем натуральном k с помощью таких весов можно с гарантией узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

8. Вася, Петя и Коля решили купить два одинаковых рюкзака. На первый они сбросились в отношении 8:6:5, а на второй — в отношении 7:5:4 (эти числа означают, соответственно, доли Васи, Пети и Коли). При этом оказалось, что один из ребят отдал за второй рюкзак на 25 рублей больше, чем за первый. Сколько стоил один рюкзак?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке квадратной таблицы 5×5 стоит натуральное число. За один ход можно брать любую клетку и ко всем числам, стоящим в соседних с ней по стороне клетках, прибавлять единицу. Всегда ли за несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой все числа, стоящие в граничных клетках, делятся на 3? (Клетка называется граничной, если у неё есть сторона на границе таблицы).

2. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 50. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, уменьшить результат на единицу и записать на доску получившееся в итоге вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 12 и 30 можно записать 3011 или 1229. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Может ли это число быть квадратом натурального числа?

3. Даны три различных натуральных числа. Петя выписал на доску квадраты всех трёх их попарных разностей. Докажите, что сумма выписанных Петей чисел не меньше шести.

4. Двадцать школьников образовали несколько клубов. В каждый клуб входят ровно четверо школьников, и для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Докажите, что всего клубов не более 30.

5. На занятии математического кружка преподаватель раздал ученикам восемнадцать карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на двух карточках). Петя расставляет все 18 карточек в ряд в произвольном порядке и находит сумму всех пятнадцати четырёхзначных чисел, составленных из четвёрок цифр, стоящих подряд. Помогите Пете расставить карточки в таком порядке, чтобы получившаяся сумма была максимальна.

6. Квадрат разбит на меньшие квадраты (не обязательно одинаковые). Всегда ли квадраты разбиения можно покрасить в три цвета таким образом, чтобы любые два квадрата, имеющие общий отрезок границы, были окрашены в разные цвета?

7. На столе стоят 50 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 51 г, 52 г, 53 г, …, 100 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире. Весы покажут, какая гиря тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает k граммов, иначе весы покажут равенство. При каком наибольшем натуральном k с помощью таких весов можно с гарантией узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

8. Вася, Петя и Коля решили купить два одинаковых рюкзака. На первый они сбросились в отношении 8:6:5, а на второй — в отношении 7:5:4 (эти числа означают, соответственно, доли Васи, Пети и Коли). При этом оказалось, что один из ребят отдал за второй рюкзак на 25 рублей больше, чем за первый. Сколько стоил один рюкзак?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке квадратной таблицы 3×3 стоит натуральное число. За один ход можно брать любую клетку и ко всем числам, стоящим в соседних с ней по стороне клетках, прибавлять единицу. Всегда ли за несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой все числа, стоящие в граничных клетках, делятся на 3? (Клетка называется граничной, если у неё есть сторона на границе таблицы).

2. По большому листу бумаги прыгают две очень маленькие блохи. Первый прыжок блохи делают по прямой навстречу друг другу (возможно, их прыжки имеют разную длину). Затем, перед каждым следующим прыжком блохи поворачиваются на 90 градусов. Первая блоха – против часовой стрелки, а вторая – по часовой стрелке. При этом каждый прыжок у каждой из блох на 1 см длиннее её предыдущего прыжка. Через 100 прыжков блохи оказались на расстоянии 3 метров друг от друга. На каком расстоянии друг от друга находились блохи первоначально?

3. Вася, Петя и Коля решили купить два одинаковых рюкзака. На первый они сбросились в отношении 8:6:5, а на второй — в отношении 7:5:4 (эти числа означают, соответственно, доли Васи, Пети и Коли). При этом оказалось, что один из ребят отдал за второй рюкзак на 25 рублей больше, чем за первый. Сколько стоил один рюкзак?

4. На занятии математического кружка преподаватель раздал ученикам девять карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на одной карточке). Петя расставляет карточки в произвольном порядке, а Вася находит сумму всевозможных двузначных чисел, составленных из двух цифр, стоящих рядом. Например, если Петя расставит карточки 1-3-5-7-9-2-4-6-8, то у Васи получится число 13+35+57+79+92+24+46+68=414. Найдите разницу между самым большим и самым маленьким числом, которое может получиться у Васи.

5. Имеется четыре кубика с рёбрами 1 см, 2 см, 3 см и 5 см. Можно ли собрать из этих кубиков фигуру, у которой площадь поверхности составляет менее 200 см^2? Кубики можно ставить друг на друга гранями. Фигура не должна распадаться на несколько не связанных между собой частей.

6. Каждая клетка таблицы 7×7 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Возможна ли такая раскраска, и если да, то сколько в ней может быть зеленых клеток?

7. Первая цифра пятизначного числа равна остатку от деления этого числа на 2, вторая — остатку от деления этого числа на 3, третья — остатку от деления этого числа на 4, четвёртая — остатку от деления этого числа на 5, пятая — остатку от деления этого числа на 6. Найдите все такие числа. Напомним, что первая цифра числа не может быть нулём.

8. На столе стоят 20 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 21 г, 22 г, 23 г, …, 40 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной монете, и весы покажут, какая тяжелее, но только если разность весов этих монет превышает восемь граммов. Как с помощью таких весов можно узнать, сколько весит каждая из гирь на столе?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

СТАРШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА; ПЕРВАЯ ЛИГА, бой за 1-2 места

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке BC выбрана точка D, а на продолжении отрезка AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Докажите, что $2DE = D_1E_1$.

2. Дано чётное натуральное число n. На доске написаны n вещественных чисел. Каждым ходом можно выбрать два числа, стереть их и вместо каждого написать их произведение. Докажите, что, каковы бы ни были начальные n чисел, за конечное число ходов можно сделать все числа на доске равными.

3. Верно ли, что остаток от деления 2^{2^n} на 2^n-1 при каждом натуральном $n \geq 2$ является степенью числа 4 с целым неотрицательным показателем?

4. Натуральное число n называется *противным*, если его можно записать в виде $n = a^b+b$ с натуральными $a, b > 1$. Существуют ли 102 последовательных натуральных числа, среди которых ровно 100 противных?

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AC = BD$. Точка H на продолжении отрезка BD за точку D такова, что $\angle CHD = 90°$. Докажите, что $AH+2CD > DH+BC$.

6. Стороны единичных квадратов, составляющих таблицу $m\times n$, красят в три цвета так, чтобы каждый единичный квадратик имел две стороны одного цвета и две стороны другого цвета. Сколькими способами можно это сделать?

7. Докажите, что для каждого положительного x и для каждого натурального n выполнено неравенство $$x^n+\frac{1}{x^n}-2 \geq n^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right).$$

8. В стране Голливудии больше трёх городов. Каждые два соединены прямой дорогой, движение на которой разрешено только в одном направлении. Гастроном Ганнибал Лектор путешествует по Голливудии, каждый день сменяя место пребывания, пока это возможно. Полиция арестует его, как только узнает, в каком городе он находится. Правительство разрешило временно перекрыть часть дорог в стране по выбору полиции, но так, чтобы для каждого города остались открытыми две дороги, относящиеся к нему (дорога относится к городу, если она выходит из него или приходит в него). Можно ли быть уверенным, что теперь Лектора арестуют?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, бои за 3-8 места

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке BC выбрана точка D, а на продолжении отрезка AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Докажите, что $2DE = D_1E_1$.

2. На доске написаны 6 вещественных чисел. Каждым ходом можно выбрать два числа, стереть их и вместо каждого написать их произведение. Докажите, что, каковы бы ни были начальные 6 чисел, за конечное число ходов можно сделать все числа на доске равными.

3. Верно ли, что остаток от деления 2^{2^n} на 2^n-1 при каждом натуральном $n \geq 2$ является степенью числа 4 с целым неотрицательным показателем?

4. Для каких натуральных n можно написать на доске $2n$ чисел, среди которых есть различные, так, что сумма любых n из написанных чисел равна произведению остальных n?

5. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AB. Точки M и N на сторонах AB и BC соответственно таковы, что каждый из отрезков CM и AN делит трапецию на две равновеликие части. Докажите, что отрезок MN делит отрезок BD пополам.

6. Стороны единичных квадратов, составляющих таблицу $m \times n$, красят в три цвета так, чтобы каждый единичный квадратик имел две стороны одного цвета и две стороны другого цвета. Сколькими способами можно это сделать?

7. Докажите, что для каждого положительного x и для каждого натурального n выполнено неравенство $x^n + \dfrac{1}{x^n} - 2 \geq n^2\left(x + \dfrac{1}{x} - 2\right)$.

8. Некоторые города страны Голливудии соединены дорогами. Туроператор "Кватротур" предлагает экскурсии, на которых туристы объезжают (по дорогам) 4 города, возвращаясь в тот, с которого начали. А туроператор "Чинкветур" предлагает экскурсии, на которых туристы объезжают (по дорогам) 5 городов, возвращаясь в тот, с которого начали. Оказалось, что через каждый город проходит и какой-то из маршрутов "Кватротура", и какой-то из маршрутов "Чинкветура". Может ли случиться, что в стране нет ни одного замкнутого маршрута, проходящего ровно по 3 городам?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке BC выбрана точка D, а на продолжении отрезка AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Докажите, что $2DE = D_1E_1$.

2. Петрик запрограммировал калькулятор так, что после нажатия клавиши "=" число a на экране превращается в число $\frac{a-1}{a+1}$. После 2014 нажатий клавиши "=" подряд на экране оказалось число 2016. Какое число было на экране изначально?

3. Солдат называется *одарённым*, если он либо выше обоих своих соседей по строю, либо ниже их обоих. 2016 солдат разного роста встали в круг. Сколько среди них может быть одарённых?

4. Для каких натуральных n можно написать на доске $2n$ чисел, среди которых есть различные, так, что сумма любых n из написанных чисел равна произведению остальных n?

5. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AB. Точки M и N на сторонах AB и BC соответственно таковы, что каждый из отрезков CM и AN делит трапецию на две равновеликие части. Докажите, что отрезок MN делит отрезок BD пополам.

6. Стороны единичных квадратов, составляющих таблицу $m\times n$, красят в три цвета так, чтобы каждый единичный квадратик имел две стороны одного цвета и две стороны другого цвета. Сколькими способами можно это сделать?

7. Андрий участвовал в соревнованиях по бегу, все прибежали в разное время. Андрий опередил $1/m$ всех участников, а Андрия опередили $1/n$ всех участников, где $m \le n$. Докажите, что Андрий обязательно стал призером (то есть прибежал первым, вторым или третьим).

8. Некоторые города страны Голливудии соединены дорогами. Туроператор "Кватротур" предлагает экскурсии, на которых туристы объезжают (по дорогам) 4 города, возвращаясь в тот, с которого начали. А туроператор "Чинкветур" предлагает экскурсии, на которых туристы объезжают (по дорогам) 5 городов, возвращаясь в тот, с которого начали. Оказалось, что через каждый город проходит и какой-то из маршрутов "Кватротура", и какой-то из маршрутов "Чинкветура". Может ли случиться, что в стране нет ни одного замкнутого маршрута, проходящего ровно по 3 городам?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC сторона AB вдвое длиннее стороны AC. На продолжении CA за точку A выбрана точка D так, что $CD = 3AC$. Докажите, что перпендикуляр из C, опущенный на BD, проходит через середину AB.

2. Петрик запрограммировал калькулятор так, что после нажатия клавиши "=" число a на экране превращается в число $\frac{a-1}{a+1}$. После 2014 нажатий клавиши "=" подряд на экране оказалось число 2016. Какое число было на экране изначально?

3. Трапеция $ABCD$ такова, что $AB = 2BC = 2CD = 2DA$. Точки K, L и M на BC, CD и DA соответственно таковы, что $BK:KC = CL:LD = DM:MA = 2:1$. Найдите угол LMK.

4. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ натуральных чисел такова, что НОД(a_{k-1}, a_k) делится на k при всех $2 \le k \le 10$. Найдите наименьшее возможное значение $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$.

5. Солдат называется *одарённым*, если он либо выше обоих своих соседей по строю, либо ниже их обоих. Можно ли расставить несколько солдат по кругу так, чтобы среди них оказалось ровно 111 одарённых?

6. Стороны единичных квадратов, составляющих таблицу 5×6, красят в три цвета так, чтобы каждый единичный квадратик имел две стороны одного цвета и две стороны другого цвета. Сколькими способами можно это сделать?

7. Андрий участвовал в соревнованиях по бегу, все прибежали в разное время. Андрий опередил $1/m$ всех участников, а Андрия опередили $1/n$ всех участников, где $m \le n$. Докажите, что Андрий обязательно стал призером (то есть прибежал первым, вторым или третьим).

8. Некоторые города страны Голливудии соединены дорогами. Туроператор "Кватротур" предлагает экскурсии, на которых туристы объезжают (по дорогам) 4 города, возвращаясь в тот, с которого начали. А туроператор "Чинкветур" предлагает экскурсии, на которых туристы объезжают (по дорогам) 5 городов, возвращаясь в тот, с которого начали. Оказалось, что через каждый город проходит и какой-то из маршрутов "Кватротура", и какой-то из маршрутов "Чинкветура". Может ли случиться, что в стране нет ни одного замкнутого маршрута, проходящего ровно по 3 городам?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 1−6 места

1. Найдите количество способов расположить в квадрате 101×101 по клеточкам максимально возможное количество непересекающихся доминошек (прямоугольников из двух клеток) так, что в любой квадрат 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными.

2. Положительные числа a и b связаны соотношением $a^3b^3+ab = a^2+b^2$. Какие значения может принимать величина a^4-a^3, если известно, что $b^4+b^3 = 1$.

3. В музее современного искусства размещено 200 шедевров абстрактной живописи. Изучив эти шедевры, искусствовед Иванов установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано k цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдется общий цвет. При каком наименьшем k такое возможно?

4. Натуральное число n называется *противным*, если его можно записать в виде $n = a^b+b$ с натуральными $a, b > 1$. Существуют ли 102 последовательных натуральных числа, среди которых ровно 100 противных?

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. В ней нет солдат одинакового роста, причем рост каждого из солдат больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, ровно на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах. Докажите, что у какого-то солдата, не стоящего с краю, рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей.

6. В таблице 100×100 расставлены различные целые числа. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, меньше них, назовём *большими*. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, больше них, назовём *маленькими*. Докажите, что количества маленьких и больших чисел отличаются не более, чем в четыре раза.

7. Какие натуральные числа можно представить в виде $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\ldots-\frac{1}{a_{100}}$ где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа?

8. Внутри треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AD = BC$, $\angle DAC = \angle DCB$ и $\angle DBC = \angle DAB+\angle DBA$. Докажите, что $AC/2+BD > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 7-8 места; ПЕРВАЯ ЛИГА, бои за 1-4 места

1. Какое наибольшее количество непересекающихся доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно разместить в квадрате 99×99 таким образом, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными?

2. Для любых чисел x и y докажите неравенство $x^2+y^2+xy+2 \geq 2(x+y)$.

3. В музее современного искусства размещено 200 шедевров абстрактной живописи. Изучив эти шедевры, искусствовед Иванов установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано k цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдется общий цвет. При каком наименьшем k такое возможно?

4. Натуральное число n называется *противным*, если его можно записать в виде $n = a^b+b$ с натуральными $a, b >$ 1. Докажите, что существуют 50 последовательных противных чисел.

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. В ней нет солдат одинакового роста, причем рост каждого из солдат больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, ровно на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах. Докажите, что у какого-то солдата, не стоящего с краю, рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей.

6. В таблице 100×100 расставлены различные целые числа. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, меньше них, назовём *большими*. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, больше них, назовём *маленькими*. Докажите, что количества маленьких и больших чисел отличаются не более, чем в четыре раза.

7. Какие натуральные числа можно представить в виде $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}-\ldots-\dfrac{1}{a_{100}}$ где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа?

8. Внутри треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AD = BC$, $\angle DAC = \angle DCB$ и $\angle DBC = \angle DAB+\angle DBA$. Докажите, что $AC > CD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА, бои за 5-8 места; ВТОРАЯ ЛИГА

1. В квадрате 100×100 так разместили 2500 непересекающихся доминошек, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку. Верно ли, что либо все доминошки расположены вертикально, либо все доминошки расположены горизонтально?

2. По краю крышки круглого стола вбит 51 гвоздь. Между каждой парой соседних гвоздей натянуто две ниточки. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). За ход игрок перерезает одну ниточку. Ниточки, перерезанные в два последовательных хода, не должны иметь ни одного общего конца. Не имеющий хода проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На доске написаны три последовательных натуральных 10-значных числа без нулей в записи, каждое из которых делится на свою последнюю цифру. Докажите, что у какого-то из этих чисел можно вычеркнуть первую цифру таким образом, чтобы полученное число тоже делилось бы на свою последнюю цифру.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых a^2-1 делится на $ab+1$.

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. В ней нет солдат одинакового роста, причем рост каждого из солдат больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, ровно на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах. Докажите, что у какого-то солдата, рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей.

6. Среди 8 шаров половина шаров имеют один вес и половина — другой. Можно ли за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти два шара разного веса?

7. Для любых чисел x и y докажите неравенство $x^2+y^2+xy+2 \geq 2(x+y)$.

8. Внутри треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AD = BC$, $\angle DAC = \angle DCB$ и $\angle DBC = \angle DAB+\angle DBA$. Докажите, что $AC > CD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В квадрате 10×10 так разместили 25 непересекающихся доминошек, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку. Верно ли, что либо все доминошки расположены вертикально, либо все доминошки расположены горизонтально?

2. По краю крышки круглого стола вбит 51 гвоздь. Между каждой парой соседних гвоздей натянуто две ниточки. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). За ход игрок перерезает одну ниточку. Ниточки, перерезанные в два последовательных хода, не должны иметь ни одного общего конца. Не имеющий хода проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На доске написаны 3 последовательных натуральных 10-значных числа без нулей в записи, каждое из которых делится на свою последнюю цифру. Докажите, что у какого-то из этих чисел можно вычеркнуть первую цифру таким образом, чтобы полученное число тоже делилось бы на свою последнюю цифру.

4. На доске написано шестизначное натуральное число. Если поставить знак умножения между тройками цифр, то произведение получившихся трехзначных чисел будет в три раза меньше исходного числа. Найдите все такие шестизначные числа, для которых это возможно.

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. В ней нет солдат одинакового роста, причем рост каждого из солдат больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, ровно на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах. Докажите, что у какого-то солдата, не стоящего с краю, рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей.

6. Среди 8 шаров половина шаров имеют один вес, а половина — другой. Можно ли за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти два шара разного веса?

7. Докажите неравенство $3^{2016}+4^{2016}+5^{2016} < 6^{2016}$.

8. Петрик запрограммировал калькулятор так, что после нажатия клавиши "=" число a на экране превращается в число $\dfrac{a-1}{a+1}$. После 2014 нажатий клавиши "=" подряд на экране оказалось число 2016. Какое число было на экране изначально?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 1–4 места.

1. В таблице 100×100 расставлены различные целые числа. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, меньше них, назовём *большими*. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, больше них, назовём *маленькими*. Докажите, что количества маленьких и больших чисел отличаются не более, чем в четыре раза.

2. На доске написаны три последовательных натуральных 10-значных числа без нулей в записи, каждое из которых делится на свою последнюю цифру. Докажите, что у какого-то из этих чисел можно вычеркнуть первую цифру таким образом, чтобы полученное число тоже делилось бы на свою последнюю цифру.

3. Какие натуральные числа можно представить в виде $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\ldots-\frac{1}{a_{100}}$ где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа?

4. Верно ли, что среди любых 13 подряд идущих натуральных чисел найдётся число, у которого все простые делители больше 11?

5. В кружок поступили 16 детей. Могло ли так случиться, что для любых двоих из поступивших A и B найдутся ровно двое из оставшихся 14, знакомых и с A, и с B?

6. В ряд расставили 1000 чисел, не все из которых равны 0, так, чтобы сумма любых 20 стоящих подряд чисел была неотрицательна. Докажите, что сумма каких-то 13 стоящих подряд чисел положительна.

7. В крышку стола вбито 49 гвоздей. Любые два гвоздя соединены одной ниточкой. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). За ход игрок перерезает одну ниточку. Ниточки, перерезанные в два последовательных хода, не должны соединять один и тот же гвоздь с другими. Не имеющий хода проигрывает. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?

8. Какое наибольшее количество непересекающихся доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно разместить в квадрате 99×99 таким образом, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 5−8 места, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В таблице 100×100 расставлены различные целые числа. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, меньше них, назовём *большими*. Числа, у которых более половины чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, больше них, назовём *маленькими*. Докажите, что количества маленьких и больших чисел отличаются не более, чем в четыре раза.

2. На доске написаны три последовательных натуральных 10-значных числа без нулей в записи, каждое из которых делится на свою последнюю цифру. Докажите, что у какого-то из этих чисел можно вычеркнуть первую цифру таким образом, чтобы полученное число тоже делилось бы на свою последнюю цифру.

3. Какие натуральные числа можно представить в виде $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}-\ldots-\dfrac{1}{a_{100}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа?

4. Верно ли, что среди любых 13 подряд идущих натуральных чисел найдётся число, у которого все простые делители больше 11?

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. В ней нет солдат одинакового роста, причем рост каждого из солдат больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, ровно на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах. Докажите, что у какого-то солдата, не стоящего с краю, рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей.

6. В ряд расставили 1000 чисел, не все из которых равны 0, так, чтобы сумма любых 20 стоящих подряд чисел была неотрицательна. Докажите, что сумма каких-то 19 стоящих подряд чисел положительна.

7. В крышку стола вбито 20 гвоздей. Любые два гвоздя соединены одной ниточкой. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). За ход игрок перерезает одну ниточку. Ниточки, перерезанные в два последовательных хода, не должны соединять один и тот же гвоздь с другими. Не имеющий хода проигрывает. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?

8. Какое наибольшее количество непересекающихся доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно разместить в квадрате 99×99 таким образом, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Из пункта А одновременно в одном направлении выезжают «Опель» со скоростью 80 км/ч и «Форд» со скоростью 100 км/ч. Через некоторое время вслед за ними с некоторой постоянной скоростью выехал «Альфа Ромео», который через час после своего выезда обогнал «Опель», а еще через полчаса — «Форд». Найдите скорость «Альфа Ромео».

2. На доске написаны три последовательных натуральных 10-значных числа без нулей в записи, каждое из которых делится на свою последнюю цифру. Докажите, что у какого-то из этих чисел можно вычеркнуть первую цифру таким образом, чтобы полученное число тоже делилось бы на свою последнюю цифру.

3. Среди 8 шаров половина шаров имеют один вес, а половина — другой. Можно ли за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти два шара разного веса?

4. В записи натурального числа нет девяток. Ваня взял несколько (более одной) последних цифр этого числа, увеличил их на 1, и сложил получившееся число с изначальным. Могло ли получиться число 123456789?

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. В ней нет солдат одинакового роста, причем рост каждого из солдат больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, ровно на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах. Докажите, что у какого-то солдата, не стоящего с краю, рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей.

6. В ряд расставили 100 ненулевых чисел так, чтобы сумма любых пяти стоящих подряд чисел была неотрицательна. Докажите, что сумма каких-то четырех стоящих подряд чисел положительна.

7. В крышку стола вбито 20 гвоздей. Любые два гвоздя соединены одной ниточкой. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). За ход игрок перерезает одну ниточку. Ниточки, перерезанные в два последовательных хода, не должны соединять один и тот же гвоздь с другими. Проигрывает тот, кто не имеет хода. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?

8. Клетки доски 2×11 покрашены в черный и белый цвета так, что каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной клеткой. Какое наименьшее число черных клеток может быть на доске?