МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 26.11.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Можно ли составить 12 различных двузначных чисел, кратных семи, из ненулевых цифр, используя каждую не более трёх раз?

2. Ровно в 20:16 два муравья начали ползти по дорожке навстречу друг другу. Они встретились, когда первый муравей прополз ровно треть всей дорожки. На следующий день первый муравей начал ползти по той же дорожке в 20:15, а второй навстречу ему в 20:17, и они встретились, когда первый муравей прополз половину дорожки. Какую часть всей дорожки успеет проползти до встречи первый муравей, если на третий день он начнёт ползти в 20:16, а второй навстречу ему в 20:15?

3. В корзине лежит больше трёх яблок (не обязательно одинаковых). Оказалось, что суммарный вес любых трёх яблок составляет меньше пяти процентов от суммарного веса остальных яблок. Какое наименьшее количество яблок может лежать в корзине?

4. Найдите все пары простых чисел p, q ($p > q$) таких, что $p+q+11$ делится на $p-q$.

5. Как отметить на шахматной доске 8×8 несколько клеток таким образом, чтобы ни одна отмеченная клетка не примыкала к границе, в каждой строке и в каждом столбце было отмечено не более двух клеток, и при любом разбиении доски на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток) хотя бы одна доминошка покрывала две отмеченные клетки?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 26.11.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Можно ли квадрат разрезать на пять фигур: треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и семиугольник (не обязательно выпуклые)?

2. На доске написано несколько различных натуральных чисел, делящихся на 3. Оказалось, что каждая цифра 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 используется не более четырех раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть записано на доске?

3. Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство $(a^4+2)(b^2+2)+(a^2+2)(b^4+2) \geq 2((a^2+b)^2+(b^2+a)^2)$.

4. Найдите все пары простых чисел p и q ($p > q$) такие, что $(p+q)^3$ не делится на 3, но делится на $(p-q)^2$.

5. Серёжа отметил 10 клеток в квадрате 100×100. Ни одна из отмеченных клеток не лежит у края квадрата. В каждой строчке и в каждом столбце лежит не более двух отмеченных клеток. Всегда ли можно так разрезать исходный квадрат на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток) так, чтобы в каждой доминошке было не более одной отмеченной клетки?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 26.11.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Огород имеет вид клетчатого квадрата 7×7 клеток. Грядка хрена занимает две клетки, соседние по вертикали, а грядка редьки — две клетки, соседние по горизонтали. Садовник хочет посадить n грядок хрена и n грядок редьки. При каком наибольшем n ему удастся это сделать?

2. В ряд стояли 100 детей: 25 девочек и 75 мальчиков. Каждый ребёнок дал каждому из стоящих правее него по одному ореху. Могло ли после этого общее количество орехов у девочек увеличиться ровно на 500?

3. Существуют ли три различных ненулевых числа a, b, c такие, что среди чисел $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ и $\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$ два равны, а третье отлично от них?

4. В треугольнике ABC сторона BC является наименьшей. На сторонах AB, AC и на продолжениях отрезка BC в обе стороны отложены точки X, Y, K и L соответственно так, что $BX = BK = BC = CY = CL$. Прямые KX и LY пересекаются в точке M. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника KLM совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника ABC.

5. На доске написано натуральное число. Каждую минуту его стирают и пишут новое по такому правилу: если число n на доске было чётно, вместо него пишут $n/2$, а если нечётно, то $3n+1$. Докажите, что существует натуральное число, которое через некоторое время увеличится более, чем в 2016 раз.

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Можно ли составить 12 различных двузначных чисел, кратных семи, из ненулевых цифр, используя каждую не более трёх раз?*

Ответ. Нет. Решение. Всего имеется ровно 12 двузначных чисел, кратных семи и состоящих из ненулевых цифр, но среди них 4 числа (14, 42, 49, 84) содержат четвёрку

Задача 2. *Ровно в 20:16 два муравья начали ползти по дорожке навстречу друг другу. Они встретились, когда первый муравей прополз ровно треть всей дорожки. На следующий день первый муравей начал ползти по той же дорожке в 20:15, а второй навстречу ему в 20:17, и они встретились, когда первый муравей прополз половину дорожки. Какую часть всей дорожки успеет проползти до встречи первый муравей, если на третий день он начнёт ползти в 20:16, а второй навстречу ему в 20:15?*

Ответ. 1/4. Решение. Из первых двух фраз решения следует, что второй муравей ползёт вдвое быстрее первого. Поэтому первый муравей во второй день прополз с 20.17 до момента встречи со вторым вдвое меньше второго, то есть 1/4 отрезка. Значит, скорость первого муравья — 1/8, а второго — 1/4 отрезка в минуту. Стало быть, на третий день второй муравей за первую минуту проползёт 1/4 дорожки, а потом до встречи со первым — 2/3 от оставшихся 3/4 дорожки, то есть 1/2, а всего — 1/4+1/2 = 3/4 дорожки, а первый — 1/4.

Задача 3. *В корзине лежит больше трёх яблок (не обязательно одинаковых). Оказалось, что суммарный вес любых трёх яблок составляет меньше пяти процентов от суммарного веса остальных яблок. Какое наименьшее количество яблок может лежать в корзине*

Ответ. 64. Решение. *Пример*. 64 яблока равных весов. *Оценка*. Рассмотрим три самых тяжёлых яблока. Тогда суммарный вес всех остальных превышает вес этих трёх яблок более, чем в 20 раз. Следовательно, среди остальных яблок найдутся более 20 троек яблок. Но тогда останется более 60 яблок, т. е. вместе с тремя самыми большими на менее 64 яблок.

Задача 4. *Найдите все пары простых чисел ($p > q$) таких, что $p+q+11$ делится на $p–q$.*

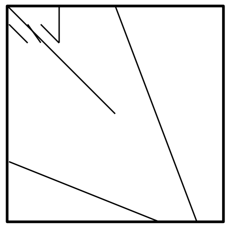
Ответ. (3; 2), (5; 2), (7; 2), (17; 2). Решение. Заметим, что если $q > 2$, то нечётное число $p+q+11$ должно делиться на чётное число $p–q$, что невозможно. Следовательно, $q = 2$. Тогда $p+13$ делится на $p–2$. Тогда и разность $(p+13)–(p–2) = 15$ делится на $p–2$. А тогда $p–2$ может быть равно только 1, 3, 5 или 15, откуда и получаем ответ.

Задача 5. *Как отметить на шахматной доске 8×8 несколько клеток таким образом, чтобы ни одна отмеченная клетка не примыкала к границе, в каждой строке и в каждом столбце было отмечено не более двух клеток, и при любом разбиении доски на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток) хотя бы одна доминошка покрывала две отмеченные клетки?*

Решение. Отметим клетки, лежащие на главной диагонали и непосредственно под ней, кроме 4 клеток, примыкающих к краю доски. Все клетки главной диагонали являются чёрными в шахматной раскраске. Поэтому снизу от неё белых клеток на 4 больше, чем чёрных, и в точности 4 «лишних» белых клетки должны быть покрыты доминошками, покрывающими чёрные клетки диагонали. Но хотя бы две из этих клеток отмечены, и две соответствующих доминошки будут целиком состоять из отмеченных клеток.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Можно ли квадрат разрезать на пять фигур: треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и семиугольник (не обязательно выпуклые)?*



Ответ. Можно. Решение. См. рисунок.

Задача 2. *На доске написано несколько различных натуральных чисел, делящихся на 3. Оказалось, что каждая цифра 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 используется не более четырех раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть записано на доске?*

Ответ. 21 число. Решение. *Оценка*. Всего на доске не более 40 цифр и не более трёх однозначных чисел. Из оставшихся 37 цифр можно составить не больше 18 чисел. *Пример*. 3, 6, 9, 30, 60, 90, 12, 21, 15, 51, 84, 48, 45, 54, 78, 87, 36, 63, 72, 27, 99.

Задача 3. *Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство* $(a^4+2)(b^2+2)+(a^2+2)(b^4+2) \geq 2((a^2+b)^2+(b^2+a)^2)$

Решение. Если раскрыть все скобки и привести подобные члены, неравенство приводится к очевидному неравенству $(a^2b-2)^2+(b^2a-2)^2 \geq 0$.

Задача 4. *Найдите все пары простых чисел p и q (p > q) такие, что* $(p+q)^3$ *не делится на 3, но делится на* $(p-q)^2$.

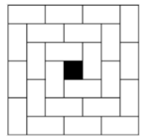
Ответ. $p = 3$, $q = 2$ или $p = 5$, $q = 3$. Решение. Если ни одно из чисел p и q не равно 3, то либо $p+q$ делится на 3 (если остатки от деления на 3 у p и q различны), либо $p-q$ делится на 3, но $p+q$ не делится на 3 (если остатки от деления на 3 у p и q одинаковы). Значит, одно из чисел p и q равно 3. Пара $p = 3$, $q = 2$ подходит. В остальных случаях $q = 3$ и $(p+3)^3$ должно делиться на $(p-3)^2$. Заметим, что НОД$(p+3, p-3) \leq 2$. Поэтому $p-3 = 1$ или $p-3 = 2$ (иначе $(p-3)^2$ делится на 16, а $(p+3)^3$ только на 8, либо у $p-3$ есть простой делитель, отсутствующий у $p+3$). В первом случае $p = 4$ не простое число, во втором получается пара $p = 5$, $q = 3$. Она подходит.

Задача 5. *Серёжа отметил 10 клеток в квадрате 100×100. Ни одна из отмеченных клеток не лежит у края квадрата. В каждой строчке и в каждом столбце лежит не более двух отмеченных клеток. Всегда ли можно так разрезать исходный квадрат на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток) так, чтобы в каждой доминошке было не более одной отмеченной клетки?*

Ответ. Не всегда. Решение. Отметим клетки, лежащие на соседних диагоналях длин 7 и 6 в левом нижнем углу доски, кроме 4 клеток, примыкающих к краю доски. Этих клеток 9, десятую отметим произвольно. Раскрасим доску в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы наша диагональ длины 7 была чёрной. Тогда ниже неё белых клеток на три больше, чем чёрных, и три «лишних» белых клетки должны быть покрыты доминошками, покрывающими чёрные клетки диагонали длины 7. Но хотя бы одна из этих клеток отмечена, и покрывающая её доминошка — искомая, так как вторая клетка в ней, как легко видеть, тоже отмечена.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Огород имеет вид клетчатого квадрата 7×7 клеток. Грядка хрена занимает две клетки, соседние по вертикали, а грядка редьки — две клетки, соседние по горизонтали. Садовник хочет посадить n грядок хрена и n грядок редьки. При каком наибольшем n ему удастся это сделать?*



Ответ. 12. Решение. Поскольку все грядки занимают $4n$ клеток, должно выполняться неравенство $4n < 49$, откуда $n \le 12$. Пример с $n = 12$ приведён на рисунке.

Задача 2. *В ряд стояли 100 детей: 25 девочек и 75 мальчиков. Каждый ребёнок дал каждому из стоящих правее него по одному ореху. Могло ли после этого общее количество орехов у девочек увеличиться ровно на 500?*

Ответ. Не могло. Решение. Ребёнок, стоящий в ряду k-ым справа, отдал $k-1$ орех, а получил $100-k$, то есть число орехов у него изменилось на $101-2k$. Значит, у каждой девочки количество орехов изменилось на нечётное число, а тогда и у 25 девочек в сумме изменение числа орехов нечётно, и 500 равняться не может.

Задача 3. *Существуют ли три различных ненулевых числа a, b, c такие, что среди чисел* $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ *и* $\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$ *два равны, а третье отлично от них?*

Ответ. Нет. Решение. Для начала заметим, что если $x \ne y$, то $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$. Покажем, что если два из исследуемых выражений равны, то им же равно и третье. Не умаляя общности можно считать, что $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3} = t$. Тогда $a^2-b^2 = t(a^3-b^3)$ и $b^2-c^2 = t(b^3-c^3)$. Складывая эти два равенства, получаем $a^2-c^2 = t(a^3-c^3)$, т.е. $\frac{a^2-c^2}{a^3-c^3} = t$, что и требовалось.

Задача 4. *В треугольнике ABC сторона BC является наименьшей. На сторонах AB, AC и на продолжениях отрезка BC в обе стороны отложены точки X, Y, K и L соответственно так, что BX = BK = BC = CY = CL. Прямые KX и LY пересекаются в точке M. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника KLM совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника ABC.*

Решение. В равнобедренном треугольнике XBK углы при основании XK вдвое меньше внешнего угла ABC. Поэтому биссектриса b угла ABC параллельна прямой XK. Так как $LB/BK = 2/1$, медиана LL_1 треугольника KLM делится биссектрисой b в отношении 2/1. Аналогично, медиана KK_1 треугольника KLM делится биссектрисой a угла ACB в отношении 2/1. Так как точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении 2/1, точка пересечения медиан LL_1 и KK_1 лежит на каждой из биссектрис b и a, откуда и вытекает утверждение задачи.

Задача 5. *На доске написано натуральное число. Каждую минуту его стирают и пишут новое по такому правилу: если число n на доске было чётно, вместо него пишут n/2, а если нечётно, то 3n+1. Докажите, что существует натуральное число, которое через некоторое время увеличится более, чем в 2016 раз.*

Решение. Заметим, что из числа $2n-1$ через две минуты получается число $3n-1$. Тогда, если исходно на доске было написано число $2^{22}-1$, то через 2 минуты на доске будет написано число

$3\cdot 2^{21}-1$, через 4 минуты — $3^2\cdot 2^{20}-1$, …, через 22 минуты — $3^{22}-1$. Поскольку $\frac{3^{22}-1}{2^{22}-1} > \frac{3^{22}}{2^{22}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{11} > 2^{11} > 2016$, число $2^{22}-1$ подходит.