КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 20.02.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Назовём восьмизначное число *отличным*, если каждая из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 входит в него ровно один раз и сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число. Найдите наименьшее отличное число.

2. За круглым столом сидят представители трёх народов — рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут и обычные люди, которые могут лгать или говорить правду по своему выбору. Каждый из сидящих произнёс две фразы: «Мой левый сосед — лжец». «Мой правый сосед — обычный человек». Докажите, что не менее трети сидящих за столом — обычные люди.

3. Имеется клетчатый квадрат 100×100, все клетки которого покрашены в белый цвет. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. За один ход можно выбрать квадрат, отличный от исходного, все клетки которого покрашены в белый цвет и перекрасить все его клетки в чёрный. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

4. По кругу выложены 20 камней, из которых n — аметисты, а остальные — изумруды. При каком наименьшем n обязательно найдутся два аметиста, между которыми лежат ровно 2 или ровно 8 камней?

5. Натуральный делитель натурального числа n будем называть *собственным*, если он отличен от 1 и n. В разложение натурального числа n на простые сомножители каждое простое число входит в нечётной степени. Докажите, что произведение двух самых больших собственных делителей n делится на произведение двух самых маленьких собственных делителей n.

6. В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать произвольное целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a, а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a. Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?

7. Числа от 1 до 1000 расставлены в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим 1000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трёх, ..., всех 1000). Докажите, что среди остатков от деления этих сумм на 1001 найдётся хотя бы 30 различных.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 20.02.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. За круглым столом сидят представители трёх народов — рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут и обычные люди, которые могут лгать или говорить правду по своему выбору. Каждый из сидящих произнёс две фразы: «Мой левый сосед — лжец». «Мой правый сосед — обычный человек». Докажите, что не менее трети сидящих за столом — обычные люди.

2. Имеется клетчатый квадрат 100×100, все клетки которого покрашены в белый цвет. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. За один ход можно выбрать квадрат, отличный от исходного, все клетки которого покрашены в белый цвет и перекрасить все его клетки в чёрный. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Сумма квадратов десяти положительных чисел равна 4. Докажите, что сумма кубов этих десяти чисел не превосходит восьми.

4. На сторонах AC и AB треугольника ABC выбраны такие точки B_1 и C_1 соответственно, что $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$ и $\angle ABB_1 < \angle CBB_1$. На стороне BC выбрана точка D. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная BB_1, пересекающая сторону AB в точке C_2, и прямая, перпендикулярная CC_1, пересекающая сторону AC в точке B_2. Докажите, что $AB_2+AC_2+BC > AB+AC$.

5. Различные натуральные числа x и y таковы, что число $\frac{xy}{x+y}$ простое. Докажите, что число $x+y$ является квадратом натурального числа.

6. В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a, а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a. Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?

7. Числа от 1 до 1000 расставлены в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим 1000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трёх, ..., всех 1000). Докажите, что среди остатков от деления этих сумм на 1001 найдётся хотя бы 30 различных.

8. На выставке животных представлены кошки, собаки и попугаи. Каждый посетитель выставки заполнил анкету, в которой указал самую красивую кошку, самую красивую собаку и самого красивого попугая. После закрытия выставки оказалось, что в любых двух анкетах совпало не более одного животного, и для любого k от 1 до 40 есть хотя бы одно животное, упомянутое в анкете ровно k раз. Какое наименьшее количество животных могло быть на выставке?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 20.02.2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Пусть n — натуральное число. Докажите, что если число $4n+1-\sqrt{8n+1}$ — целое, то оно является удвоенным квадратом натурального числа.

2. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, причем $AD+BC = AC$. Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Докажите, что $\angle AMD < 90°$.

3. По кругу выложены 1000 камней, из которых n — аметисты, а остальные — изумруды. При каком наименьшем n обязательно найдутся два аметиста, между которыми лежат ровно 2 или ровно 8 камней?

4. Будем называть натуральное число n *хорошим*, если есть такие натуральные числа a и b, что $n = a^2+b^2+2b$. Докажите, что числа n и n^3-n+2 не могут одновременно быть хорошими.

5. Числа от 1 до 1000 расставлены в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим 1000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трёх, ..., всех 1000). Докажите, что среди остатков от деления этих сумм на 1001 найдётся хотя бы 30 различных.

6. Докажите, что если a, b, $c > 0$ и $abc = 1$, то

$$a^2b+b^2c+c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

7. В треугольнике ABC угол B равен 60°, а угол C — 70°. На стороне BC выбрана точка D. Докажите, что $\angle BAD = 20°$ тогда и только тогда, когда $AB+BD = AD+DC$.

8. 2016 мальчиков выбирают девочек. Каждый мальчик выбирает ровно двух девочек: одну блондинку и одну брюнетку. Оказалось, что для любого натурального числа k, $1 \leq k \leq 80$, найдется девочка (блондинка или брюнетка), которую выбрали ровно k мальчиков. Докажите, что какие-то два мальчика выбрали одних и тех же девочек.

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Назовём восьмизначное число отличным, если каждая из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 входит в него ровно один раз и сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число. Найдите наименьшее отличное число.*

Ответ. 12034765. Решение. Назовём восьмизначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, использовав каждую ровно один раз и такое, что сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число, *хорошими*. Число 12034765 — хорошее. Чем меньшие цифры стоят в старших разрядах, тем меньше хорошее число. Значит, наименьшее хорошее число должно начинаться с 12034 (с 10 оно начинаться, очевидно, не может). 6 и 5 после 4 поставить нельзя, значит, там — 7. 5 после 7 ставить нельзя, так что наименьшее хорошее число заканчивается на 65. Но это и есть число 12034765.

Задача 2. *За круглым столом сидят представители трёх народов — рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут и обычные люди, которые могут лгать или говорить правду по своему выбору. Каждый из сидящих произнёс две фразы: «Мой левый сосед — лжец». «Мой правый сосед — обычный человек». Докажите, что не менее трети сидящих за столом — обычные люди.*

Решение. У каждого рыцаря правый сосед — обычный человек. Значит, обычных людей не меньше, чем рыцарей. Левый сосед лжеца не может быть лжецом. Не может он быть и рыцарем — правый сосед рыцаря должен быть обычным человеком. Значит, у каждого лжеца левый сосед — обычный человек, и потому обычных людей за столом не меньше, чем лжецов. Значит, обычные люди — самая многочисленная из трёх сидящих за столом народностей, и потому их не меньше трети от общего числа сидящих.

Задача 3. *Имеется клетчатый квадрат 100×100, все клетки которого покрашены в белый цвет. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. За один ход можно выбрать квадрат, отличный от исходного, все клетки которого покрашены в белый цвет и перекрасить все его клетки в чёрный. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Медведь. Решение. Первым ходом Медведь закрашивает квадрат 98×98 с центром в центре квадрата 100×100. После этого остаётся каёмка из 100×100–98×98 = 396 клеток, которые можно закрашивать только по одной. Так как первую клеточку закрасит Крокодил, он и проиграет через 198 пар ходов.

Задача 4. *По кругу выложены 20 камней, из которых n — аметисты, а остальные — изумруды. При каком наименьшем n обязательно найдутся два аметиста, между которыми лежат ровно 2 или ровно 8 камней?*

Ответ. При $n = 11$. Решение. Занумеруем камни по кругу 1, 2, …, 20 и переложим их, чтобы они лежали по кругу в таком порядке: 1, 4, 7, …, 19, 2, 5, …, 20, 3, 6, …, 18. Теперь рядом лежат те камни, между которыми вначале было ровно два камня, а те, между которыми вначале было ровно 8 камней, отстоят друг от друга на 2 камня. Если при этом изумруды и аметисты чередуются, то их по 10, и двух аметистов, лежащих рядом или отстоящих на 2 камня нет. Если же аметистов хотя бы 11, то, разбив камни на 10 пар лежащих рядом, замечаем, что есть пара, где оба камня — аметисты.

Задача 5. *Натуральный делитель натурального числа n будем называть* ***собственным***, *если он отличен от 1 и n. В разложение натурального числа n на простые сомножители каждое простое число входит в нечётной степени. Докажите, что произведение двух самых больших собственных делителей n делится на произведение двух самых маленьких собственных делителей n.*

Решение. Очевидно, самый маленький из собственных делителей числа n — некоторое простое число p. Самый маленький из остальных собственных делителей — это либо p^2, либо некоторое простое число q. В первом случае n делится на нечетную степень p, большую p^2, то есть хотя бы на p^3. Значит, самый большой из собственных делителей n, равный n/p, делится хотя бы на p^2, второй по величине собственный делитель n, равный n/p^2, делится хотя бы на p, а их произведение делится на $p^2{\cdot}p = p^3$, что нам и нужно. Во втором случае n/p делится на q, а второй по величине собственный делитель n, равный n/q, делится на p, так что их произведение делится на pq, что и завершает доказательство.

Задача 6. *В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать произвольное целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a, а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a. Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?*

Ответ. Не сможет. Решение. Заметим, что при описанных операциях сумма чисел в угловых клетках таблицы не меняется. Поэтому если бы можно было с их помощью сделать все числа равными, сумма чисел в угловых клетках исходной таблицы делилась бы на 4. Но она равна 2.

Задача 7. *Числа от 1 до 1000 расставлены в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим 1000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трёх, ..., всех 1000). Докажите, что среди остатков от деления этих сумм на 1001 найдётся хотя бы 30 различных.*

Решение. Допустим, различных остатков не больше 29. Тогда, так как $1000/29 > 34$, найдется хотя бы 35 одинаковых остатков. Пусть это остатки сумм $s_1 < s_2 < \ldots < s_{35}$. Но тогда различны 34 остатка сумм, получаемых удалением наибольших слагаемых из сумм $s_2, \ldots, s_{35}$.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *За круглым столом сидят представители трёх народов — рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут и обычные люди, которые могут лгать или говорить правду по своему выбору. Каждый из сидящих произнёс две фразы: «Мой левый сосед — лжец». «Мой правый сосед — обычный человек». Докажите, что не менее трети сидящих за столом — обычные люди.*

Решение. У каждого рыцаря правый сосед — обычный человек. Значит, обычных людей не меньше, чем рыцарей. Левый сосед лжеца не может быть лжецом. Не может он быть и рыцарем — правый сосед рыцаря должен быть обычным человеком. Значит, у каждого лжеца левый сосед — обычный человек, и потому обычных людей за столом не меньше, чем лжецов. Значит, обычные люди — самая многочисленная из трёх сидящих за столом народностей, и потому их не меньше трети от общего числа сидящих.

Задача 2. *Имеется клетчатый квадрат 100×100, все клетки которого покрашены в белый цвет. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. За один ход можно выбрать квадрат, отличный от исходного, все клетки которого покрашены в белый цвет и перекрасить все его клетки в чёрный. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Медведь. Решение. Первым ходом Медведь закрашивает квадрат 98×98 с центром в центре квадрата 100×100. После этого остаётся каёмка из $100\times100-98\times98 = 396$ клеток, которые можно закрашивать только по одной. Так как первую клеточку закрасит Крокодил, он и проиграет через 198 пар ходов.

Задача 3. *Сумма квадратов десяти положительных чисел равна 4. Докажите, что сумма кубов этих десяти чисел не превосходит восьми.*

Решение. Наибольшее из десяти данных чисел не превосходит 2 — иначе сумма их квадратов была бы больше 4. Значит, куб каждого из этих чисел не превосходит его удвоенного квадрата, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 4. *На сторонах AC и AB треугольника ABC выбраны такие точки B_1 и C_1 соответственно, что $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$ и $\angle ABB_1 < \angle CBB_1$. На стороне BC выбрана точка D. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная BB_1, пересекающая сторону AB в точке C_2, и прямая, перпендикулярная CC_1, пересекающая сторону AC в точке B_2. Докажите, что $AB_2+AC_2+BC > AB+AC$.*

Решение. Проведём прямую l, симметричную прямой CA относительной прямой CC_1. Так как $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$, прямая l проходит внутри угла BCC_1, пересекая отрезок B_2D в точке E, симметричной B_2 относительно CC_1. Поскольку $CB_2 = CE$, угол CEB_2 острый. Значит, угол CED — тупой, откуда $CD > CB_2 = CE$. Следовательно, $AB_2 = AC-CB_2 > AC-CD$. Аналогично, $AC_2 > AB-BD$. Складывая два полученных неравенства, находим, что $AB_2+AC_2 > AC+AB-BD-CD = AC+AB-BC$. Перенеся BC в левую часть, получаем искомое неравенство.

Задача 5. *Различные натуральные числа x и y таковы, что число $\dfrac{xy}{x+y}$ простое. Докажите, что число $x+y$ является квадратом натурального числа.*

Решение. Перепишем условие задачи в виде $xy = p(x+y)$, где p — простое. Тогда одно из чисел x и y делится на p. Не умаляя общности можно считать, что $x = pz$. Тогда $pzy = p(pz+y) \Leftrightarrow zy = pz+y \Leftrightarrow y(z-1) = pz$ (*). Так как числа z и $z-1$ взаимно просты, p делится на $z-1$, откуда $z = 2$ или $z = p+1$. В первом случае из (*) получаем $x = y$, что противоречит условию задачи. Во втором случае $x = pz = p(p+1)$, $y = pz/(z-1) = p+1$, откуда $x+y = (p+1)^2$, что и требовалось доказать.

Задача 6. *В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a, а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a. Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?*

Ответ. Не сможет. Решение. Заметим, что при описанных операциях сумма чисел в угловых клетках таблицы не меняется. Поэтому если бы можно было с их помощью сделать все числа равными, сумма чисел в угловых клетках исходной таблицы делилась бы на 4. Но она равна 2.

Задача 7. *Числа от 1 до 1000 расставлены в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим 1000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трёх, ..., всех 1000). Докажите, что среди остатков от деления этих сумм на 1001 найдётся хотя бы 30 различных.*

Решение. Допустим, различных остатков не больше 29. Тогда, так как $1000/29 > 34$, найдется хотя бы 35 одинаковых остатков. Пусть это остатки сумм $s_1 < s_2 < \ldots < s_{35}$. Но тогда различны 34 остатка сумм, получаемых удалением из сумм $s_2, \ldots, s_{35}$ последних слагаемых.

Задача 8. *На выставке животных представлены кошки, собаки и попугаи. Каждый посетитель выставки заполнил анкету, в которой указал самую красивую кошку, самую красивую собаку и самого красивого попугая. После закрытия выставки оказалось, что в любых двух анкетах совпало не более одного животного, и для любого k от 1 до 40 есть хотя бы одно животное, упомянутое в анкете ровно k раз. Какое наименьшее количество животных могло быть на выставке?*

Ответ. 100. Решение. *Оценка*. Рассмотрим животное, которое упомянули 40 раз, пусть это кошка. Тогда у нас есть хотя бы по 40 собак и попугаев (упомянутых вместе с этой кошкой). Рассмотрим по одному животному, упомянутому 39,38, …, 21 раз. Если хотя бы одно из этих животных — не кошка, то у нас есть хотя бы 21 кошка и всего не менее чем 101 животное. Значит, все эти 20 животных — кошки, но тогда на выставке хотя бы 100 животных. *Пример*. У нас будет 20 кошек, пронумерованных числами 21, ..., 40, по столько раз их и упомянут. Также будет 40 собак, занумерованных числами 1, ..., 40 и 40 попугаев, также занумерованных числами 1, ..., 40. Кошка с номером k будет упомянута в анкетах со всеми парами вида (i собака, j попугай), где $i+j = k+1$. Нетрудно понять, что таких пар (а значит, и анкет) ровно k (по одной для каждой собаки с номером 1, ..., k). Осталось найти животных, упомянутых 1, 2, ..., 20 раз. Легко видеть, что собака с номером 40 вошла в одну анкету (с суммой 41), собака с номером 39 — в две анкеты (с суммами 41 и 40), и так далее, собака с номером 21 вошла в 20 анкет (с суммами 22, ..., 41).

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Пусть n — натуральное число. Докажите, что если число* $4n+1-\sqrt{8n+1}$ *— целое, то оно является удвоенным квадратом натурального числа.*

Решение. Чтобы число $4n+1-\sqrt{8n+1}$ было целым, нужно, чтобы число $8n+1$ было квадратом натурального числа. Пусть $8n+1 = m^2$. Тогда

$$4n+1-\sqrt{8n+1} = (m^2-1)/2+1-m = (m-1)^2/2.$$

Осталось заметить, что число m нечётно, так как нечётен его квадрат. Поэтому $m = 2k+1$ для некоторого целого k, откуда $(m-1)^2/2 = 2k^2$, что и требовалось доказать.

Задача 2. *Пусть ABCD — трапеция с основаниями AD и BC, причем AD+BC = AC. Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Докажите, что* $\angle AMD < 90°$.

Решение. Как известно, треугольники BMC и DMA подобны. Пусть $AM/AD = CM/BC = k$. Тогда $AD+BC = AC = AM+MC = k(AD+BC)$, откуда $k = 1$ и $AM = AD$. Стало быть, угол AMD — острый, как угол при основании MD равнобедренного треугольника AMD.

Задача 3. *По кругу выложены 1000 камней, из которых n — аметисты, а остальные — изумруды. При каком наименьшем n обязательно найдутся два аметиста, между которыми лежат ровно 2 или ровно 8 камней?*

Ответ. При $n = 501$. Решение. Занумеруем камни по кругу 1, 2, …, 1000 и переложим их, чтобы они лежали по кругу в таком порядке: 1, 4, 7, …, 1000, 3, 6, …, 999, 2, 5, …, 998. Теперь рядом лежат те камни, между которыми вначале было ровно два камня, а те, между которыми вначале было ровно 8 камней, отстоят друг от друга на 2 камня. Если при этом изумруды и аметисты чередуются, то их по 500, и двух аметистов, лежащих рядом или отстоящих на 2 камня нет. Если же аметистов хотя бы 501, то, разбив камни на 500 пар лежащих рядом, замечаем, что есть пара, где оба камня — аметисты.

Задача 4. *Будем называть натуральное число n хорошим, если есть такие натуральные числа a и b, что* $n = a^2+b^2+2b$. *Докажите, что числа n и* n^3-n+2 *не могут одновременно быть хорошими.*

Решение. Заметим, что $a^2+b^2+2b = a^2+(b+1)^2-1$, то есть число хорошее, если оно на 1 меньше суммы двух квадратов. Сумма двух квадратов не может давать при делении на 4 остаток 3, поэтому если число n хорошее, что остаток от его деления на 4 не равен 2. Но тогда число $n^3-n = n(n-1)(n+1)$ делится на 4, и число n^3-n+2 дает при делении на 4 остаток 2, то есть не может быть хорошим.

Задача 5. *Числа от 1 до 1000 расставлены в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим 1000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трёх, ..., всех 1000). Докажите, что среди остатков от деления этих сумм на 1001 найдётся хотя бы 30 различных.*

Решение. Допустим, различных остатков не больше 29. Тогда, так как $1000/29 > 34$, найдется хотя бы 35 одинаковых остатков. Пусть это остатки сумм $s_1 < s_2 < \ldots < s_{35}$. Но тогда различны 34 остатка сумм, получаемых удалением из сумм $s_2, \ldots, s_{35}$ последних слагаемых.

Задача 6. *Докажите, что если a, b, c > 0 и abc = 1, то* $a^2b+b^2c+c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$.

Решение. Поделим правую часть неравенства на abc, а левую — на $\sqrt{abc}$ и возведем обе части получившегося неравенства в квадрат. Получим

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b} \geq 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \quad (*).$$

Заметим, что справедливо неравенство $x^2+\frac{1}{x} \geq 1+x \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(x-1)}{x}=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x} \geq 0.$

Складывая три таких неравенства для $\frac{a}{c}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$, получаем (*).

Задача 7. *В треугольнике ABC угол B равен 60°, а угол C — 70°. На стороне BC выбрана точка D. Докажите, что $\angle BAD = 20°$ тогда и только тогда, когда AB+BD = AD+DC.*

Решение. Для начала докажем, что если $\angle BAD = 20°$, то $AB+BD = AD+DC$. Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC. Тогда $OA = OB = OC$, откуда $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, $\angle OAC = \angle OCA = \beta$, $\angle OAB = \angle OBA = \gamma$. При этом $60° = \angle ABC = \angle OBC+\angle OBA = \alpha+\gamma$. Аналогично, $70° = \alpha+\beta$, $50° = \beta+\gamma$. Значит, $\angle OAB = \gamma = (50°+60°-70°)/2 = 20°$ и точка O лежит на BD. Аналогично, $\alpha = 40°$, $\beta = 30°$. Отложим на продолжении отрезка AB за точку B отрезок $BX = BD$, а на продолжении отрезка AD за точку D — отрезок $DY = DC$. Достаточно доказать, что $AX = AY$. Поскольку $\angle COD$ — внешний к треугольнику AOC, то $\angle COD = 2\beta = 60°$. Далее, $\angle DOB$ — внешний к треугольнику AOB, откуда $\angle BOD = 2\gamma = 40° = \alpha = \angle OBD$. Значит, $BD = DO$, и треугольники ODC и BDY равны по двум сторонам и углу между ними: $\angle BDY = \angle ODC$, $DC = DY$, $OD = BD$. Следовательно, $\angle YBD = \angle COD = 60°$, а $\angle BYD = \angle OCD = 40°$. Треугольники XBY и DBY равны по двум сторонам и углу между ними: BY — общая, $BX = BD$, $\angle YBX = 180°-60°-60° = 60° = \angle YBD$. Наконец, $\angle XYA = \angle XYB+\angle BYA = 2\angle BYD = 80°$. В треугольнике AXY два угла равны 20° и 80°, а значит третий угол равен 80° и треугольник равнобедренный, а $AX = AY$.

Теперь, если $\angle BAD_1 < 20° = \angle BAD$, то точка D_1 лежит на отрезке BD. Значит, $AB+BD_1 < AB+BD = AD+DC < (AD_1+D_1D)+DC = AD_1+D_1C$. Аналогично рассматривается случай $\angle BAD_2 > 20°$.

Задача 8. *2016 мальчиков выбирают девочек. Каждый мальчик выбирает ровно двух девочек: одну блондинку и одну брюнетку. Оказалось, что для любого натурального числа k, $1 \leq k \leq 80$, найдется девочка (блондинка или брюнетка), которую выбрали ровно k мальчиков. Докажите, что какие-то два мальчика выбрали одних и тех же девочек.*

Решение. Рассмотрим двудольный (мульти)граф, где вершины — блондинки и брюнетки, а рёбра — выборы мальчиков. В нем 2016 рёбер. Надо доказать, что есть два ребра с общими концами.

Зафиксируем 80 вершин со степенями 1, 2, …, 80 соответственно; назовём их *выбранными*. Пусть имеется k рёбер, оба конца которых выбраны; также назовём их *выбранными*. Тогда рёбер, один конец которых выбран, будет $1+2+\ldots+80-2k$. С другой стороны, их не больше, чем $2016-k$, откуда $k \geq 1+2+\ldots+80-2016 = 1224$.

Рассмотрим выбранные вершины со степенями 1, 2, …, 26. Из них исходит не более $1+2+\ldots+26 = 351$ выбранного ребра. Значит, остальные 54 вершины связывают не менее $1224-351 = 873$ рёбер. С другой стороны, пусть среди этих 54 вершин x блондинок и $54-x$ брюнеток, и между любыми двумя вершинами — не более одного ребра. Тогда всего между этими вершинами не более $x(54-x) \le (x+54-x)^2/2^2 = 27^2 = 729$ рёбер. Противоречие.