КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2014

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В ряд стоят 99 островитян. Каждый из них произнёс две фразы: «Рядом со мной стоит лжец». «Рядом со мной стоят два лжеца». Сколько в этом ряду лжецов? Ответ не забудьте обосновать.

2. Существует ли натуральное число, которое содержит все ненулевые цифры от 1 до 9 и делится на произведение всех своих цифр?

3. В таблице 3×3 расставлены 9 чисел так, что 6 сумм этих чисел во всех строках и столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться единице?

4. Петя и Вася по очереди ставят ладей на крайние клетки доски 17×17. Ладью можно ставить только на свободную клетку, находящуюся под боем четного числа уже поставленных ладей (ладьи не бьют друг сквозь друга). Начинает Петя. Кто не может сходить — проиграл. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Натуральное число $n < 10000$ таково, что число $n+100!$ — простое. Докажите, что число n тоже простое или равно 1.

6.Квадрат 40×40 клеток разбит на 400 фигур из четырёх клеток в виде буквы "Г". Докажите, что найдется прямая, идущая по линии сетки, которая хотя бы 6 из этих фигур разрезает на две фигурки из двух клеток («доминошки»).

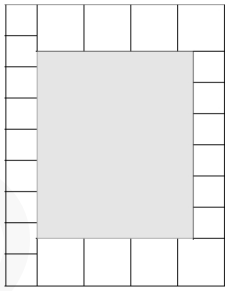
7. Существует ли такая компания из 20 человек, в которой каждый человек имеет ровно 8 знакомых и любые двое людей имеют общего знакомого тогда и только тогда, когда они сами незнакомы?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2014

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Существует ли натуральное число, которое содержит все ненулевые цифры от 1 до 9 и делится на произведение всех своих цифр?

2. На рисунке серый прямоугольник окружён каймой из квадратов двух различных размеров. Найдите отношение сторон серого прямоугольника.



3. В клетках квадрата 25×25 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (по одному в каждой клетке). Каждый из них произнёс следующие две фразы. «В соседних со мной клетках стоят как минимум два лжеца.» «В соседних со мной клетках стоят как минимум три лжеца.» Сколько среди них могло быть лжецов? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ с углом $\angle BCD = 72°$. Известно, что $AD = BD = CD$ и $\angle ABD = 54°$. На диагонали BD отмечена такая точка K, что $AK = AD$. Докажите, что $KD = BC$.

5. Квадрат 40×40 клеток разбит на 400 фигур из четырёх клеток в виде буквы «Г». Докажите, что найдется прямая, идущая по линии сетки, которая хотя бы 6 из этих фигур разрезает на две фигурки из двух клеток («доминошки»).

6. Куб 100×100×100 составлен из кубиков 1×1×1, некоторые из которых покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый так, что в каждом параллелепипеде 1×1×100, состоящем из 100 единичных кубиков, ровно два чёрных кубика и между ними расположено чётное число белых (возможно, 0). Докажите, что можно перекрасить половину чёрных кубиков в белый цвет так, чтобы в каждом параллелепипеде 1×1×100 остался ровно один чёрный кубик.

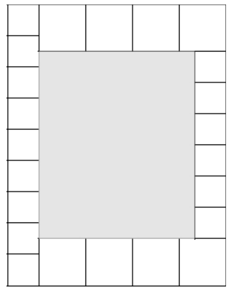
7. Аутичный мальчик Вася для каждого натурального числа n рассматривает все делители, квадраты которых не превосходят n, и выбирает из них наибольший делитель d. Затем он выписывает в тетрадку число $n/d–d$. Докажите, что в какой-то момент в тетрадке у Васи число 10 встретится хотя бы миллион раз.

8. Существует ли такая компания из 125 человек, в которой каждый человек имеет ровно 50 знакомых и любые двое людей имеют общего знакомого тогда и только тогда, когда они сами незнакомы?

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 16.02.2014

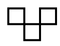
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА



1. На рисунке серый прямоугольник окружён каймой из квадратов двух различных размеров. Найдите отношение сторон серого прямоугольника.

2. Натуральное число N называется *подходящим*, если существует положительная правильная несократимая дробь, в N раз меньшая суммы своих числителя и знаменателя. Сколько существует подходящих чисел, не превосходящих миллиона?

3. Точка C лежит на отрезке AE. С одной стороны от прямой AE построены не имеющие общих внутренних точек треугольники ABC и CDE так, что $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Найдите отношение площадей треугольников ACD и EBC.

4. Найдите все пары m, n натуральных чисел, для которых прямоугольник $m\times n$ можно разделить на трёхклеточные фигуры вида  (как угодно повёрнутые).

5. У каждого натурального n рассмотрим наибольший его делитель d, не превосходящий $\sqrt{n}$, и положим $a_n = n/d–d$. Докажите, что в последовательности a_1, a_2, a_3, … каждое целое неотрицательное число встречается бесконечно много раз.

6. Куб $n\times n\times n$ составлен из кубиков $1\times1\times1$, некоторые из которых покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый так, что в каждом параллелепипеде $1\times1\times n$, состоящем из n единичных кубиков, ровно два чёрных кубика и между ними расположено чётное число белых (возможно, 0). Докажите, что можно перекрасить половину чёрных кубиков в белый цвет так, чтобы в каждом параллелепипеде $1\times1\times n$ остался ровно один чёрный кубик.

7. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) с углом $\angle BCD = 72°$ $AD = BD = CD$. На диагонали BD отмечена точка K такая, что $AK = AD$. Точка M — середина стороны CD, а N — точка пересечения AM и BD. Докажите, что $BK = ND$.

8. На доске написано число 1. Если в какой-то момент на доске написано n, через секунду его заменяют числом $n+2^n$. Докажите, что первые 3^{2014} чисел, которые будут записаны на доске, дают попарно различные остатки при делении на 3^{2014}.

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В ряд стоят 99 островитян. Каждый из них произнёс две фразы: «Рядом со мной стоит лжец». «Рядом со мной стоят два лжеца». Сколько в этом ряду лжецов? Ответ не забудьте обосновать.*

Ответ. 50. **Решение**. Занумеруем стоящих по порядку. Первый — лжец: рядом с ним стоит всего один человек, поэтому вторая его фраза — заведомая ложь. Рядом со вторым стоит лжец, поэтому первая его фраза верна. Значит, он — рыцарь. Но тогда верна и вторая его фраза. Следовательно, третий в ряду — лжец. Первая его фраза неверна, поэтому оба его соседа — рыцари. Значит, четвёртый — рыцарь. Рассуждая таким же образом дальше, убеждаемся, что все, у кого нечётные номера — лжецы, а все, у кого чётные — рыцари, откуда и получаем ответ.

Задача 2. *Существует ли натуральное число, которое содержит все ненулевые цифры от 1 до 9 и делится на произведение всех своих цифр?*

Ответ. Нет. **Решение**. Если бы такое число существовало, оно делилось бы на 2 и на 5, то есть оканчивалось бы на 0, и произведение всех его цифр равнялось бы 0.

Задача 3. *В таблице 3×3 расставлены 9 чисел так, что 6 сумм этих чисел во всех строках и столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться единице?*

Ответ. 5. **Решение**. Пусть в таблице не меньше 6 единиц. Если их по две в каждой строке и каждом столбце, то любое не равное 1 число входит в две равные суммы: в своей строке и своем столбце. В противном случае есть строка или столбец (пусть строка), где три единицы. Тогда в каждом столбце есть ещё одна единица (если две — в этом столбце сумма чисел равна 3, как и в строке из одних единиц, если ни одной — всего единиц не больше пяти). При этом две из этих единиц стоят в одной строке, а одной — в другой: иначе есть ещё одна строка из трёх единиц. Пусть в той строке, где две единицы, стоит ещё какое-то число a. Тогда суммы в его строке и его столбце равны $a+2$, что невозможно. <u>Пример</u> на 5 единиц (по строкам): 111, 112, 345.

Задача 4. *Петя и Вася по очереди ставят ладей на крайние клетки доски 17×17. Ладью можно ставить только на свободную клетку, находящуюся под боем четного числа уже поставленных ладей (ладьи не бьют друг сквозь друга). Начинает Петя. Кто не может сходить — проиграл. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?*

Ответ. Вася. **Решение**. Васе достаточно выбрать одну из двух главных диагоналей доски и ставить каждую свою ладью симметрично относительно этой диагонали ладье, которую перед этим поставил Петя, а если Петя поставил свою ладью в один из концов этой диагонали, то поставить свою ладью в другой ее конец. Тогда после каждого хода Васи расстановка ладей будет симметрична относительно выбранной диагонали, и потому если Петя сумел поставить ладью на пустую клетку, Вася тоже сможет поставить ладью на пустую симметричную клетку (а если один конец выбранной диагонали был пуст, то был пуст и другой ее конец). При этом если Петину ладью бьёт чётное число других ладей, то симметричных им ладей, бьющих Васину ладью, тоже будет четное число, а других бьющих её ладей не будет: единственной такой ладьёй могла бы быть предыдущая Петина, но она не бьёт Васину, так как квадратной доске симметричные относительно ее диагонали клетки лежат в разных горизонталях и вертикалях.

Задача 5. *Натуральное число $n < 10000$ таково, что число $n+100!$ — простое. Докажите, что число n тоже простое.*

Решение. Допустим, число N — составное. Тогда у него есть делитель m, не превосходящий $\sqrt{N}$, то есть меньший 100. Но тогда и сумма $n+100!$ делится на m и не может быть простым числом.

Задача 6. *Квадрат 40×40 клеток разбит на 400 фигур из четырёх клеток в виде буквы "Г". Докажите, что найдется прямая, идущая по линии сетки, которая хотя бы 6 из этих фигур разрезает на две фигурки из двух клеток («доминошки»).*

Решение. Всего внутри квадрата есть $39\times2 = 78$ линий сетки. Каждая из 400 фигурок одной из этих линий режется на две «доминошки». Так как $78\times5 = 390 < 400$, какая-то из линий режет на две «доминошки» хотя бы 6 фигурок.

Задача 7. *Существует ли такая компания из 20 человек, в которой каждый человек имеет ровно 8 знакомых и любые двое людей имеют общего знакомого тогда и только тогда, когда они сами незнакомы?*

Ответ. Существует. **Решение**. Разобьём 20 человек на 5 групп по 4 человека, расставим группы по кругу, и пусть каждый дружит со всеми восьмерыми из двух соседних групп. Легко проверить, что все условия задачи при этом выполнены

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Существует ли натуральное число, которое содержит все ненулевые цифры от 1 до 9 и делится на произведение всех своих цифр?*

Ответ. Нет. **Решение**. Если бы такое число существовало, оно делилось бы на 2 и на 5, то есть оканчивалось бы на 0, и произведение всех его цифр равнялось бы 0.

Задача 2. *На рисунке серый прямоугольник окружён каймой из квадратов двух различных размеров. Найдите отношение сторон серого прямоугольника.*

Ответ. 6:5. **Решение**. Пусть сторона большого квадрата равна x, малого — y. Приравнивая левый и правый края каёмки, получаем $9y = 2x+6y$, откуда $2x = 3y$. Следовательно, верхний край каёмки имеет длину $4x+y = 7y$. Таким образом, вертикальная сторона каёмки равна $9y$, а горизонтальная — $7y$. Значит, у серого прямоугольника вертикальная сторона равна $9y–2x = 6y$, а горизонтальная равна $7y–2y = 5y$, откуда и получаем ответ.

Задача 3. *В клетках квадрата 25×25 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (по одному в каждой клетке). Каждый из них произнёс следующие две фразы. «В соседних со мной клетках стоят как минимум два лжеца.» «В соседних со мной клетках стоят как минимум три лжеца.» Сколько среди них могло быть лжецов? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*

Ответ. 313, 314, 315 или 316. **Решение**. Рассмотрим самую нижнюю строчку квадрата. Очевидно, что она обладает следующими свойствами: в ее крайних клетках стоят лжецы, в клетках соседних с крайними — рыцари, два рыцаря не могут стоять в соседних клетках и более двух лжецов не могут стоять подряд. Посчитаем, сколько лжецов может стоять в такой строке. Пусть в ней n групп подряд идущих лжецов (из 1 или 2 лжецов каждая) и $n–1$ рыцарь. Тогда групп по 2 лжеца должно быть $25–n–(n–1) = 26–2n$. Поскольку в крайних группах не может быть двух лжецов, имеем $26–2n \le n–2$, откуда $n \ge 10$. С другой стороны, очевидно, что $n \le 13$, а количество лжецов в этой строчке, равное $26–n$, может быть от 13 до 16.

Рассмотрим теперь две соседние строчки с номерами i и $i+1$. Докажем, что они либо совпадают, либо противоположны, причем последнее возможно только в случае, если рыцари и лжецы в этих строчках чередуются. Для этого заметим, что ни у какого человека не могут быть два соседа, имеющих такие же убеждения: в противном случае для лжеца первая фраза будет правдой, а для рыцаря вторая фраза — ложью. Рассмотрим теперь самых левых людей в наших двух строках и разберем следующие два случая.

1) Эти люди противоположны. Докажем, по индукции что тогда n-ый слева человек в i-ой строке противоположен n-му слева человеку в $(i+1)$-ой строке. Пусть для людей с номерами $n–1$ это так, а для людей с номерами n — не так. Тогда у каждого из людей с номером n уже есть сосед с такими же убеждениями, значит люди с номерами $n–1$ противоположны им, что противоречит индукционному предположению. Таким образом, в этом случае строки i и $i+1$ противоположны.

2) Эти люди одинаковы. Тогда по индукции легко доказать, что эти строчки полностью совпадают. Однако, если в одной из них стоят два одинаковых человека подряд, то мы получим квадратик 2×2, в котором все люди одинаковы, что невозможно. Таким образом, в этом случае строки i и $i+1$ совпадают, а лжецы и рыцари в этих строках чередуются.

Итак, если в нижней строке есть два лжеца подряд, то любые две соседние строки противоположны, то есть содержат в сумме 25 лжецов. Таким образом, лжецов будет $25\cdot 12+m = 300+m$, где m — количество лжецов в нижней строке. Поскольку $13 \le m \le 16$, количество лжецов может быть от 313 до 316. Аналогично, если в левом столбце есть два лжеца подряд, то противоположны любые два соседних столбца и количество лжецов опять будет от 313 до 316. Наконец, если и в нижней строке и в левом столбце рыцари и лжецы чередуются, то любые две соседние строки противоположны, то есть лжецы и рыцари стоят в шахматном порядке и лжецов тогда 313.

Таким образом, количество лжецов может быть от 313 до 316. Чтобы получить пример с $313+k$ лжецами нужно поставить в нижнюю строчку рыцарей и лжецов так, чтобы было ровно $2k$ пар подряд идущих лжецов, и заполнить все остальные строки чередуясь. Легко видеть, что этот пример подходит.

Задача 4. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ с углом $\angle BCD = 72°$. Известно, что $AD = BD = CD$ и $\angle ABD = 54°$. На диагонали BD отмечена такая точка K, что $AK = AD$. Докажите, что $KD = BC$.*

Решение. Из равнобедренного треугольника BDA находим $\angle BDA = 180° - 2\angle ABD = 72°$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике DAK угол при основании DK равен 72°. Значит, угол при его вершине A равен 36°. Таков же и угол при вершине D равнобедренного треугольника BDC. Так как у треугольников DAK и BDC вдобавок равны и боковые стороны, эти треугольники равны. Значит равны и их основания BC и KD, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Квадрат 40×40 клеток разбит на 400 фигур из четырёх клеток в виде буквы "Г". Докажите, что найдется прямая, идущая по линии сетки, которая хотя бы 6 из этих фигур разрезает на две фигурки из двух клеток («доминошки»).*

Решение. Всего внутри квадрата есть $39\times2 = 78$ линий сетки. Каждая из 400 фигурок одной из этих линий режется на две «доминошки». Так как $78\times5 = 390 < 400$, какая-то из линий режет на две «доминошки» хотя бы 6 фигурок.

Задача 6. *Куб 100×100×100 составлен из кубиков 1×1×1, некоторые из которых покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый так, что в каждом параллелепипеде 1×1×100, состоящем из 100 единичных кубиков, ровно два чёрных кубика и между ними расположено чётное число белых (возможно, 0). Докажите, что можно перекрасить половину чёрных кубиков в белый цвет так, чтобы в каждом параллелепипеде 1×1×100 остался ровно один чёрный кубик.*

Решение. Выберем у куба 100×100×100 три попарно соседние грани. Каждому кубику 1×1×1 сопоставим три координаты, равные количествам кубиков между ним и этими тремя гранями. Поскольку между двумя черными кубиками, лежащими в одном параллелепипеде 1×1×100, четное число белых, суммы их координат имеют разную чётность. Поэтому, перекрасив в белый цвет все кубики с чётной суммой координат, мы добьёмся цели.

Задача 7. *Аутичный мальчик Вася для каждого натурального числа n рассматривает все делители, квадраты которых не превосходят n, и выбирает из них наибольший делитель d. Затем он выписывает в тетрадку число $n/d-d$. Докажите, что в какой-то момент в тетрадке у Васи число 10 встретится хотя бы миллион раз.*

Решение. Число 10 будет появляться в тетрадке у Васи каждый раз, когда ему будет встречаться число вида $n = p(p+10)$, где p — простое число, большее 10. В самом деле, квадраты всех делителей числа n, имеющих вид ap, где $a > 1$, не меньше $4p^2 > p(p+10)$, $(p+10)^2 > p(p+10)$, а любой делитель числа $p+10$, не равный $p+10$, не превосходит $(p+10)/2 = p/2+5 < p$. Так как простых чисел бесконечно много, наступит момент, когда число 10 будет записано в Васиной тетрадке миллион раз.

Задача 8. *Существует ли такая компания из 125 человек, в которой каждый человек имеет ровно 50 знакомых и любые двое людей имеют общего знакомого тогда и только тогда, когда они сами незнакомы?*

Ответ. Существует. **Решение**. Разобьём 125 человек на 5 групп по 25 человек, расставим группы по кругу, и пусть каждый дружит со всеми пятьюдесятью из двух соседних групп. Легко проверить, что все условия задачи при этом выполнены.

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *На рисунке серый прямоугольник окружён каймой из квадратов двух различных размеров. Найдите отношение сторон серого прямоугольника.*

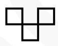
Ответ. 6:5. **Решение**. Пусть сторона большого квадрата равна x, малого — y. Приравнивая левый и правый края каёмки, получаем $9y = 2x+6y$, откуда $2x = 3y$. Следовательно, верхний край каёмки имеет длину $4x+y = 7y$. Таким образом, вертикальная сторона каёмки равна $9y$, а горизонтальная — $7y$. Значит, у серого прямоугольника вертикальная сторона равна $9y–2x = 6y$, а горизонтальная равна $7y–2y = 5y$, откуда и получаем ответ.

Задача 2. *Натуральное число N называется* ***подходящим****, если существует положительная правильная несократимая дробь, в N раз меньшая суммы своих числителя и знаменателя. Сколько существует подходящих чисел, не превосходящих миллиона?*

Ответ. 998. **Решение**. $a/b = (a+b)/N \Leftrightarrow N = b+b^2/a$. Поскольку N — целое, b^2 должно делиться на a. Так как a и b по условию взаимно просты, $a = 1$. Таким образом, все подходящие числа имеют вид b^2+b, где b — натуральное число, большее 1 (при $b = 1$ не получается правильной дроби) и меньшее 1000 (чтобы N не было больше миллиона), откуда и получаем ответ.

Задача 3. *Точка C лежит на отрезке AE. С одной стороны от прямой AE построены не имеющие общих внутренних точек треугольники ABC и CDE так, что $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Найдите отношение площадей треугольников ACD и EBC.*

Ответ. 1. **Решение**. Поскольку из условия следует, что $CD \parallel AB$, $\angle BAC = \angle DCE$, и треугольники ABC и CDE подобны по двум углам. Опустим высоты BF и DG, получаем $BF/AC = DG/CE$, откуда $2S_{EBC} = BF\cdot CE = AC\cdot DG = 2S_{ACD}$.

Задача 4. *Найдите все пары m, n натуральных чисел, для которых прямоугольник $m\times n$ можно разделить на трёхклеточные фигуры вида*  *(как угодно повёрнутые).*

Ответ. mn делится на 6, и каждое из чисел m и n больше 1. **Решение**. Пусть прямоугольник удалось разрезать на указанные фигуры. Раскрасим его клетки в шахматном порядке. Поскольку в каждой фигур все три клетки одного цвета, количество клеток каждого цвета должно делиться на 3. Поскольку число чёрных клеток отличается от числа белых не больше, чем на 1, если оба этих числа делятся на 3, то они равны. Значит, mn должно делиться на 6. Обратно, если mn делится на 6 и каждое из чисел m и n больше 1, прямоугольник $m\times n$ можно разрезать на прямоугольники 2×3, а каждый такой прямоугольник — на две указанных в условии фигуры. Это очевидно, если одно из чисел m и n делится на 3, а другое — на 2. Если же m делится на 6, а n не делится ни на 2, ни на 3, достаточно представить n в виде $6k+5$ или $6k+7$ и научиться резать на прямоугольники 2×3 прямоугольники 5×6 и 7×6, что несложно.

Задача 5. *У каждого натурального n рассмотрим наибольший его делитель d, не превосходящий $\sqrt{n}$, и положим $a_n = n/d–d$. Докажите, что в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ каждое целое неотрицательное число встречается бесконечно много раз.*

Решение. Неотрицательное целое число m будет появляться в тетрадке у Васи каждый раз, когда ему будет встречаться число вида $n = p(p+m)$, где p — простое число, большее m. В самом деле, квадраты всех делителей числа n, имеющих вид ap, где $a > 1$, не меньше $4p^2 > p(p+m)$, $(p+m)^2 > p(p+m)$, а любой делитель числа $p+m$, не равный $p+m$, не превосходит $(p+m)/2 < p$. Так как простых чисел бесконечно много, число m в Васиной тетрадке встретится бесконечно много раз.

Задача 6. *Куб $n\times n\times n$ составлен из кубиков $1\times1\times1$, некоторые из которых покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый так, что в каждом параллелепипеде $1\times1\times n$, состоящем из n единичных* *кубиков, ровно два чёрных кубика и между ними расположено чётное число белых (возможно, 0). Докажите, что можно перекрасить половину чёрных кубиков в белый цвет так, чтобы в каждом параллелепипеде 1×1×n остался ровно один чёрный кубик.*

Решение. Выберем у куба $n\times n\times n$ три попарно соседние грани. Каждому кубику 1×1×1 сопоставим три координаты, равные количествам кубиков между ним и этими тремя гранями. Поскольку между двумя черными кубиками, лежащими в одном параллелепипеде $1\times1\times n$, четное число белых, суммы их координат имеют разную чётность. Поэтому, перекрасив в белый цвет все кубики с чётной суммой координат, мы добьёмся цели.

Задача 7. *В трапеции ABCD (BC || AD) с углом ∠BCD = 72° AD = BD = CD. На диагонали BD отмечена точка K такая, что AK = AD. Точка M — середина стороны CD, а N — точка пересечения AM и BD. Докажите, что BK = ND.*

Решение. Лемма. Если в равнобедренном треугольнике с углами 72° при основании боковая сторона равна x, а основание равно y, то $x/y = (x+y)/x = y/(x–y)$. Доказательство. Проведем в равнобедренном треугольнике PQR с углами 72° при основании PR биссектрису PS. По свойству биссектрисы $x/y = PQ/PR = QS/SR$. Из равнобедренности треугольников PSQ и SPR следует, что $QS = SP = PR = y$. Значит, $SR = QR–QS = x–y$, откуда $x/y = y/(x–y) \Leftrightarrow x/y = (x+y)/x$.

Положим $AD = BD = CD = x$, $BC = KD = y$. Продолжим луч AM до пересечения с прямой BC в точке T. Из равенства треугольников AMD и TMC имеем $TC = AB = x$, откуда $BT = x+y$. Из подобия треугольников ADN и TBN имеем $BN/ND = BT/AD = (x+y)/x = x/y$. Из условия имеем $DK/KB = y/(x–y)$. Таким образом, $BN/ND = DK/KB$, откуда легко вывести, что $BK = ND$.

Задача 8. *На доске написано число 1. Если в какой-то момент на доске написано n, через секунду его заменяют числом $n+2^n$. Докажите, что первые 3^{2014} чисел, которые будут записаны на доске, дают попарно различные остатки при делении на 3^{2014}.*

Решение. Введём обозначения для членов нашей последовательности: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n+2^{a_n}$. Заметим, что все члены нечётны.

Лемма. Для каждого натурального n число $2^{3^n}+1$ кратно 3^{n+1} и не кратно 3^{n+2}. Доказательство. Проведем индукцию по n. База: $2^3+1 = 9$ — делится на 3^2 и не делится на 3^3. Переход. $2^{3^{n+1}}+1 = (2^{3^n}+1)(2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1)$. Так как 2^{3^n} даёт при делении на 9 остаток 8, вторая скобка кратна 3 и не кратна 9. По предположению индукции первая скобка содержит ровно n троек в своём разложении на множители, следовательно, произведение — ровно $n+1$.

Из леммы вытекает, в частности, что $2^{2\cdot 3^n}-1$ делится на 3^{n+1}. Поэтому, если нечетные числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 3^n, то 2^a и 2^b дают одинаковые остатки при делении на 3^{n+1}.

Теперь мы готовы доказать по индукции следующее утверждение: $a_1, a_2, \ldots, a_{3^n}$ дают разные остатки при делении на 3^n. База $n = 1$ проверяется непосредственно: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 521$. Перейдём от n к $n+1$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{3^n}$ дают разные остатки при делении на 3^n. Так как эти числа нечётны, их остатки при делении на $2\cdot3^n$ суть $1, 3, 5, \ldots, 2\cdot3^n–1$. Следовательно, нечетные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{3^n}$ сравнимы по модулю $2\cdot3^n$, а, значит, и по модулю 3^n с нечетными числами $1, 3, 5, \ldots, 2\cdot3^n–1$. Поэтому остаток при делении на 3^{n+1} у разности $a_{3^n+1}–a_1$ такой же, как у числа $2^1+2^3+\ldots+2^{2\cdot 3^n}-1 = 2(2^{2\cdot 3^n}-1)/3$. Последнее выражение, как мы видели, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1}. Таким образом, a_{3^n+1} даёт такой же остаток при делении на 3^n, как и a_1. Поэтому, применяя то же рассуждение, мы получим, что такой же остаток при делении на 3^{n+1}, как разность $a_{3^n+1}–a_1$, имеет разность $a_{3^n+2}–a_2$ и, далее, $a_{3^n+k}–a_k$ при всех k.

Разбивая числа $a_1, a_2,\ldots, a_{3^{n+1}}$ на тройки вида a_k, a_{3^n+k}, $a_{2\cdot3^n+k}$, мы видим, что числа в каждой тройке дают одинаковые остатки при делении на 3^n и разные — при делении на 3^{n+1}. Учитывая, что первые числа троек дают разные остатки при делении на 3^n, получаем, что в совокупности все 3^{n+1} чисел дают разные остатки при делении на 3^{n+1}, что и требовалось доказать.