XL УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 30.11-06.12.2012

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1.12.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. На столе в ряд лежат 2012 яблок. Вася берёт каждое десятое яблоко (т. е. десятое, двадцатое, тридцатое и т. д.). После этого он берёт каждое девятое из оставшихся яблок, затем каждое восьмое из оставшихся и т. д., наконец, он берёт каждое третье из оставшихся к этому моменту яблок. Сколько яблок останется в итоге на столе?

2. Вася сбегает по эскалатору, едущему вниз, не пропуская ни одной ступеньки. Скорость Васи вдвое больше скорости эскалатора. Пока Вася ехал, он пробежал 80 ступеней. Сколько ступеней он пробежит, если будет сбегать по неподвижному эскалатору?

3. В классе несколько парт. Оказалось, что ровно половина всех девочек сидят рядом с мальчиками, а мальчиков и девочек, сидящих в одиночку за партой, поровну. Докажите, что мальчиков в классе чётное число.

4. В записи нечетного шестизначного числа все цифры различны и нет нулей. При этом оно делится на трёхзначные числа, образованные первыми тремя его цифрами и последними тремя его цифрами. Докажите, что это число делится на 67.

5. На острове, где живут 900 человек, из которых некоторые — рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали две партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили, за какую из партий он голосовал. Оказалось, что людей, сказавших, что они голосовали за вторую партию, вдвое больше, чем поданных за эту партию голосов, а людей, сказавших, что они голосовали за первую партию, вдвое меньше, чем поданных за эту партию голосов. Сколько голосов было подано за первую партию?

6. У Васи имеется набор из 1000 единичных кубиков. На каждой грани каждого кубика расположено несколько точек, причём на разных гранях может быть разное число точек, но все кубики одинаковы между собой. Докажите, что из этих кубиков можно составить большой куб, суммарное количество точек на всех гранях которого делится на 7.

7. На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?

XL УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 30.11-06.12.2012

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1.12.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Пусть a и b некоторые положительные действительные числа, причём $a > b$. Какая из дробей — a/b или b/a — меньше отличается от числа 1?

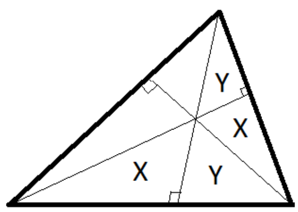
2. На острове, где живут 1000 человек, из которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали 2 партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили: за какую из партий он голосовал? На этот вопрос по крайней мере 800 островитян ответили: «За первую партию». Но на самом деле оказалось, что за вторую партию проголосовало 800 островитян. Докажите, что на этом острове не менее 600 лжецов.

3. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор. Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе?

4. На доске выписаны все натуральные делители числа n, три наименьшие из которых — это $1 < a < b$. Оказалось, что $n = a^2+b^3$. Найдите все такие n.

5. На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?

6. Три высоты остроугольного треугольника разбили его на шесть треугольников (см. рис.). Оказалось, что треугольники, отмеченные буквой X, равны. Докажите, что треугольники, отмеченные буквой Y, тоже равны.



7. У Васи имеется бесконечный набор единичных кубиков. На каждой грани каждого кубика написано натуральное число. Докажите, что из этих кубиков можно составить большой куб, сумма чисел на всех гранях которого делится на 2012.

8. Найдите все тройки натуральных чисел x, y и z, для которых выполняется равенство $(x+y)(1+xy) = 2^z$.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1.12.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. На острове, где живут 1000 человек, из которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали 2 партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили: за какую из партий он голосовал? На этот вопрос по крайней мере 800 островитян ответили: «За первую партию». Но на самом деле оказалось, что за вторую партию проголосовало 800 островитян. Докажите, что на этом острове не менее 600 лжецов.

2. Точка P расположена внутри треугольника ABC так, что $BP > AP$ и $BP > CP$. Докажите, что $\angle ABC < 90°$.

3. Пусть $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ — все делители натурального числа n. Найдите все n, для которых $n = d_2^2 + d_3^3$.

4. У Васи имеется бесконечный набор прямоугольников со сторонами, не превосходящими 10. На каждой стороне каждого прямоугольника написано натуральное число. Докажите, что из этих прямоугольников можно составить (без пробелов и наложений) большой прямоугольник, сумма чисел на всех сторонах которого делится на 2012.

5. Арне и Бертиль играют в игру на доске 11×11. Начинает Арне. В начале игры фишка стоит на центральной клетке. Каждым ходом Арне двигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали, а Бертиль возводит стенку с одной из сторон любой клетки. Двигать фишку через стенку Арне не может. Арне хочет уйти с доски, а Бертиль хочет ему помешать. Кто добьётся своей цели при правильной игре?

6. В вершинах куба написаны 8 различных натуральных чисел, по одному в каждой вершине, а на каждом ребре написан наибольший общий делитель двух чисел, стоящих в концах этого ребра. Может ли сумма всех чисел на рёбрах быть равна сумме всех чисел в вершинах?

7. В треугольнике ABC $AB > AC > BC$. Точка D на стороне AB такова, что $CD = BC$, а точка M — середина AC. Докажите, что $BD = AC$ тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 2\angle ABM$.

XL УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 30.11-06.12.2012

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. *На столе в ряд лежат 2012 яблок. Вася берёт каждое десятое яблоко (т. е. десятое, двадцатое, тридцатое и т. д.). После этого он берёт каждое девятое из оставшихся яблок, затем каждое восьмое из оставшихся и т. д., наконец, он берёт каждое третье из оставшихся к этому моменту яблок. Сколько яблок останется в итоге на столе?*

Ответ. 404. Решение. Разобьём яблоки на десятки (1-10, 11-20, …, 2001-2010, 2011-2012), последний десяток — неполный. Первым ходом Вася берёт по последнему яблоку из каждого десятка, кроме неполного. После этого от каждого полного десятка останется 9 яблок, и вторым ходом Вася снова возьмёт по последнему яблоку из каждого десятка, кроме неполного. Нетрудно убедиться, что то же будет происходить и на остальных его ходах. Таким образом, после восьми ходов от каждого из 202 десятков, включая неполный, останется по два яблока, откуда и следует ответ.

Задача 2. *Вася сбегает по эскалатору, едущему вниз, не пропуская ни одной ступеньки. Скорость Васи вдвое больше скорости эскалатора. Пока Вася ехал, он пробежал 80 ступеней. Сколько ступеней он пробежит, если будет сбегать по неподвижному эскалатору?*

Ответ. 120. Решение. Пока Вася бежал, эскалатор спустился на $80 : 2 = 40$ ступеней. Значит, его длина равна $80+40 = 120$ ступеням. Их Вася и пробежит, сбегая по неподвижному эскалатору.

Задача 3. *В классе несколько парт. Оказалось, что ровно половина всех девочек сидят рядом с мальчиками, а мальчиков и девочек, сидящих в одиночку за партой, поровну. Докажите, что мальчиков в классе чётное число.*

Решение. Пусть в классе a мальчиков, b девочек, и c мальчиков, которые сидят рядом с девочками или в одиночку. По условию девочек, сидящих рядом с мальчиками или в одиночку, тоже c. Пусть за партами сидит d пар девочек и m пар мальчиков. Тогда $c = a–2m = b –2d$. По условию половина девочек — целое число. Значит, число b четно, а с ним четно и число c. Но тогда четно и число $a = c+2m$, что и требовалось доказать.

Задача 4. *В записи нечетного шестизначного числа все цифры различны и нет нулей. При этом оно делится на трёхзначные числа, образованные первыми тремя его цифрами и последними тремя его цифрами. Докажите, что это число делится на 67.*

Решение. Обозначим числа, образованные тремя первыми и тремя последними цифрами нашего, через a и b соответственно. Тогда наше число равно $1000a+b$. Так как оно делится на a, то b делится на a. Так как оно делится на b, то $1000a$ делится на b. Пусть $b = ca$. Тогда 1000 делится на c. Так как числа a и b трехзначные, число c — однозначное. Оно может равняться 1, 2, 4, 5 или 8. Но 1 не подходит, так как тогда $a = b$, а по условию в числе $1000a+b$ нет одинаковых цифр, а 2, 4 и 8 не подходят, так как число $1000a+b$ нечетно. Итак, $b = 5a$, откуда $1000a+b = 1005a$, а число $1005 = 3\cdot 5\cdot 67$ делится на 67. Замечание. Такие числа существуют, например, 127635.

Задача 5. *На острове, где живут 900 человек, из которых некоторые — рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали две партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили, за какую из партий он голосовал. Оказалось, что людей, сказавших, что они голосовали за вторую партию, вдвое больше, чем поданных за эту партию голосов, а людей, сказавших, что они голосовали за первую партию, вдвое меньше, чем поданных за эту партию голосов. Сколько голосов было подано за первую партию?*

Ответ. 600. Решение. Пусть за первую партию голосовали a рыцарей и b лжецов, а за вторую — c рыцарей и d лжецов. Тогда первая партия получила $a+b$ голосов, вторая — $c+d$ голосов, сказали, что голосовали за первую партию, $a+d$ человек, а за вторую — $b+c$ человек. По условию $b+c = 2(c+d) \Leftrightarrow b = c+2d$ и $2(a+d) = a+b \Leftrightarrow b = a+2d$, откуда $a = c$. Всего островитян $a+b+c+d = 2a+b+d = 3a+3d = 900$, откуда $a+d = 300$ и $a+b = 2(a+d) = 600$.

Задача 6. *У Васи имеется набор из 1000 единичных кубиков. На каждой грани каждого кубика расположено несколько точек, причём на разных гранях может быть разное число точек, но все кубики одинаковы между собой. Докажите, что из этих кубиков можно составить большой куб, суммарное количество точек на всех гранях которого делится на 7.*

Решение. Напишем на каждой грани число, равное количеству точек на ней. Составим из наших кубиков куб $7\times 7\times 7$, расположив все кубики так, чтобы одинаковые числа у них располагались с одной и той же стороны. Тогда на каждой из граней этого куба все числа будут одинаковы, и сумма чисел на каждой его грани (а, значит, и на всех гранях) будет делиться на 7 (и даже на 49).

Задача 7. *На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Пусть Петя выберет *любимую* лампочку и первым ходом переключит ее. Вася, чтобы не вернуться в исходную позицию, будет вынужден переключить какую-либо другую лампочку. Тогда Петя, очевидно, сможет снова переключить любимую лампочку и т.д. Поскольку возможных комбинаций состояний лампочек конечное число, наступит момент, когда у Васи не окажется хода.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *Пусть a и b некоторые положительные действительные числа, причём $a > b$. Какая из дробей — a/b или b/a — меньше отличается от числа 1?*

Ответ: $\frac{b}{a}$. Решение. $0 < 1-\frac{b}{a} = \frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b}-1$.

Задача 2. *На острове, где живут 1000 человек, из которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали 2 партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили: за какую из партий он голосовал? На этот вопрос по крайней мере 800 островитян ответили: «За первую партию». Но на самом деле оказалось, что за вторую партию проголосовало 800 островитян. Докажите, что на этом острове не менее 600 лжецов.*

Решение. 200 или менее островитян не сказали, что они голосовали за первую партию. Поскольку за вторую партию проголосовали 800 островитян, по крайней мере 800–200 = 600 из них солгали во время опроса. Все они, очевидно, лжецы.

Задача 3. *Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор. Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе?*

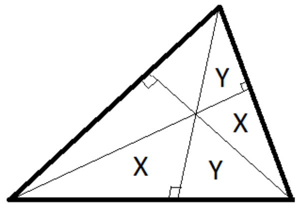
Ответ: 6. Решение. Пусть A — наибольшее число набора. Если оно отрицательно или равно 0, то остальные числа в наборе отрицательны, и сумма любых двух из них меньше A. Значит, наибольшее число набора положительно. Очевидно, два числа, суммой которых оно является, тоже положительны, так что в наборе не меньше трёх положительных чисел. Аналогично рассмотрением наименьшего числа набора доказывается, что в нем не меньше трех отрицательных чисел. Таким образом, в наборе не меньше 6 чисел. Пример набора из 6 чисел: –3, –2, –1, 1, 2, 3.

Задача 4. *На доске выписаны все натуральные делители числа n, три наименьшие из которых — это $1 < a < b$. Оказалось, что $n = a^2+b^3$. Найдите все такие n.*

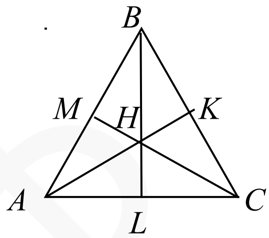
Ответ: 68. Решение. Разность $n-a^2 = b^3$ делится на a. Число a, очевидно, простое. Поэтому b делится на a. Стало быть, b — не простое. На другие простые, кроме a, b делиться не может, иначе между a и b были бы делители n. Значит, b — степень a. Очевидно, $b = a^2$, иначе между a и b были бы делители n. Итак, $n = a^2+ a^6$. Заметим, что сумма в правой части последнего равенства четна, откуда $a = 2$, а $n = 4+64 = 68$.

Задача 5. *На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Пусть Петя выберет *любимую* лампочку и первым ходом переключит ее. Вася, чтобы не вернуться в исходную позицию, будет вынужден переключить какую-либо другую лампочку. Тогда Петя, очевидно, сможет снова переключить любимую лампочку и т.д. Поскольку возможных комбинаций состояний лампочек конечное число, наступит момент, когда у Васи не окажется хода.



Задача 6. *Три высоты остроугольного треугольника разбили его на шесть треугольников (см. рис.). Оказалось, что треугольники, отмеченные буквой X, равны. Докажите, что треугольники, отмеченные буквой Y, тоже равны.*



<u>Решение</u>. В равных прямоугольных треугольниках AHL и CHK равны гипотенузы: $AH = CH$. Значит, треугольник AHC равнобедренный, и $\angle AHL = \angle CHL$. Угол CHK не может равняться углу HAL: он внешний для треугольника AHC. Поэтому $\angle CHK = \angle AHL$, $HK = HL$. Треугольники CHL и BHK равны по катету и острому углу: $\angle CHL = \angle AHL = \angle BHK$.

Задача 7. *У Васи имеется бесконечный набор единичных кубиков. На каждой грани каждого кубика написано натуральное число. Докажите, что из этих кубиков можно составить большой куб, сумма чисел на всех гранях которого делится на 2012.*

<u>Решение</u>. Заменим все числа на гранях кубиков их остатками от деления на 2012. Очевидно, способов выбрать кубик и записать на его гранях 6 таких остатков — конечное число. Поэтому в Васином наборе найдётся бесконечно много одинаковых кубиков. Составим из 2012^3 таких кубиков куб со ребром 2012, расположив все кубики так, чтобы одинаковые остатки у них располагались с одной и той же стороны. Тогда на каждой из сторон большого куба все остатки будут одинаковы, и их сумма на каждой из его граней (а, значит, и на всех гранях) будет делиться на 2012 (и даже на 2012^2).

Задача 8. *Найдите все тройки натуральных чисел x, y и z, для которых выполняется равенство $(x+y)(1+xy) = 2^z$.*

<u>Ответ</u>. $(1, 2^k–1, 2k)$, $(2^k–1, 1, 2k)$, $(2^k–1, 2^k+1, 3k+1)$, $(2^k+1, 2^k–1, 3k+1)$, где k–любое натуральное число. <u>Решение</u>. Если $x = 1$, то $(1+y)^2 = 2^z$, откуда $y = 2^k–1$, $z = 2k$. Аналогично рассматривается случай $y = 1$. Это дает две первые серии ответов. Пусть $x > 1$, $y > 1$. Тогда $xy+1–(x+y) = (x–1)(y–1) > 0$. Поэтому $x+y = 2^n$, $xy+1 = 2^m$, $n < m$. Подставив $y = 2^n–x$, получим $x^2–1 = 2^n(x–2^n)$. Следовательно, $(x–1)(x+1)$ делится на 2^n. Но один из этих множителей не делится на 4, значит, второй делится на $2^{n–1}$. С другой стороны, $x < 2^n–1$, поэтому $x = 2^{n–1}±1$. Обозначив $k = n–1$, получим две последние серии ответов.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *На острове, где живут 1000 человек, из которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а некоторые — лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы. В этих выборах участвовали 2 партии, причём каждый из островитян проголосовал за одну из них. На выходе с участков каждого островитянина спросили: за какую из партий он голосовал? На этот вопрос по крайней мере 800 островитян ответили: «За первую партию». Но на самом деле оказалось, что за вторую партию проголосовало 800 островитян. Докажите, что на этом острове не менее 600 лжецов.*

Решение. 200 или менее островитян не сказали, что они голосовали за первую партию. Поскольку за вторую партию проголосовали 800 островитян, по крайней мере 800–200 = 600 из них солгали во время опроса. Все они, очевидно, лжецы.

Задача 2. *Точка P расположена внутри треугольника ABC так, что $BP > AP$ и $BP > CP$. Докажите, что $\angle ABC < 90°$.*

Решение. Так как в треугольнике CPB сторона PC меньше стороны PB, лежащий против PC угол PBC меньше лежащего против PB угла PCB. Аналогично из треугольника APB угол PBA меньше угла PAB. Отсюда

$$\angle ABC = \angle PBC + \angle PBA < PCB + \angle PAB < ACB + \angle CAB,$$

что невозможно, если $\angle ABC \geq 90°$.

Задача 3. *Пусть $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ — все делители натурального числа n. Найдите все n, для которых $n = d_2^2 + d_3^3$.*

Ответ: 68. Решение. Разность $n - d_2^2 = d_3^3$ делится на d_2. Число d_2, очевидно, простое. Поэтому d_3 делится на d_2. Стало быть, d_3 — не простое. На другие простые, кроме d_2, d_3 делиться не может, иначе между d_2 и d_3 были бы делители n. Значит, d_3 — степень d_2. Очевидно, $d_3 = d_2^2$, иначе между d_2 и d_3 были бы делители n. Итак, $n = d_2^2 + d_2^6$. Заметим, что сумма в правой части последнего равенства четна, откуда $d_2 = 2$, а $n = 4+64 = 68$.

Задача 4. *У Васи имеется бесконечный набор прямоугольников со сторонами, не превосходящими 10. На каждой стороне каждого прямоугольника написано натуральное число. Докажите, что из этих прямоугольников можно составить (без пробелов и наложений) большой прямоугольник, сумма чисел на всех сторонах которого делится на 2012.*

Решение. Заменим все числа на сторонах прямоугольника их остатками от деления на 2012. Очевидно, способов выбрать прямоугольник и записать на его сторонах четыре таких остатка — конечное число. Поэтому в Васином наборе есть бесконечно много одинаковых по размеру и одинаково оснащённых остатками прямоугольников. Составим из 2012^2 таких прямоугольников прямоугольник со сторонами, в 2012 раз большими, чем у них, расположив все прямоугольники так, чтобы одинаковые остатки у них располагались с одной и той же стороны. Тогда на каждой из сторон большого прямоугольника все остатки будут одинаковы, и их сумма на каждой его сторон (а, значит, и на всех сторонах) будет делиться на 2012.

Задача 5. *Арне и Бертиль играют в игру на доске 11×11. Начинает Арне. В начале игры фишка стоит на центральной клетке. Каждым ходом Арне двигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали, а Бертиль возводит стенку с одной из сторон любой клетки. Двигать фишку через стенку Арне не может. Арне хочет уйти с доски, а Бертиль хочет ему помешать. Кто добьётся своей цели при правильной игре?*

<u>Ответ</u>: Бертиль. <u>Решение</u>. Первыми четырьмя ходами Бертиль строит стенки на четырех внешних сторонах доски, принадлежащих четырем угловым клеткам соответственно. За четыре хода Арне дойти до края доски не сможет. Далее, если Арне своим ходом выходит на крайнюю клетку доски, Бертиль строит стенку на внешней стороне этой клетки (если она угловая, то на «незастроенной» внешней стороне), а если нет — то на любой из «незастроенных» внутренних сторон. Очевидно, при такой игре Бертиля Арне никогда не сможет покинуть доску.

Задача 6. *В вершинах куба написаны 8 различных натуральных чисел, по одному в каждой вершине, а на каждом ребре написан наибольший общий делитель двух чисел, стоящих в концах этого ребра. Может ли сумма всех чисел на рёбрах быть равна сумме всех чисел в вершинах?*

<u>Ответ</u>: Нет. <u>Решение</u>. Заметим, что если натуральные числа a и b различны, то НОД(a, b) $\leq (a+b)/3$. В самом деле, если $a = md$, $b = nd$, и $m \neq n$, то $a+b = (m+n)d \geq 3d$. При этот равенство возможно только если одно из чисел a и b равно d, а другое — $2d$. Написав такие неравенства для всех рёбер куба и сложив их, получим слева сумму всех чисел на рёбрах, а справа — суммы всех чисел в вершинах. Но равенство возможно только тогда, когда каждое из трёх чисел в вершинах, соседних с наименьшим, равно удвоенному наименьшему, а по условию все числа в вершинах различны.

Задача 7. *В треугольнике ABC $AB > AC > BC$. Точка D на стороне AB такова, что $CD = BC$, а точка M — середина AC. Докажите, что $BD = AC$ тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 2\angle ABM$.*

<u>Решение</u>. Проведём через A прямую, параллельную BM, до пересечения с прямой BC, и обозначим точку пересечения C'. На стороне AB отметим точку D' так, что $AD' = BD$. Очевидно, $C'B = BC = CD$ и $BD' = AD$. Треугольник BCD равнобедренный, поэтому $\angle C'BD' = \angle ADC$. Поэтому треугольники $C'BD'$ и CDA равны, значит, $C'D' = AC$. Положим $\angle DAC = \angle C'D'B = 2\alpha$.

Пусть $BD = AC$, то есть $AD' = AC$. Тогда $C'D' = AD'$, откуда $\angle AC'D' = \angle C'AD'$. Поскольку $\angle AC'D' + \angle C'AD' = \angle C'D'B = 2\alpha$, имеем $\angle C'AD' = \alpha$. Из параллельности $C'A$ и BM заключаем $\angle ABM = \angle C'AD' = \alpha$.

Наоборот, пусть $\angle ABM = \alpha$. Отсюда следует, что $\angle C'AD' = \alpha$. Так как $\angle AC'D' + \angle C'AD' = \angle AC'D' + \alpha = \angle C'D'B = 2\alpha$, получаем, что $\angle AC'D' = \alpha$, то есть треугольник $AC'D'$ равнобедренный. Поэтому $AD' = C'D' = AC$, и, так как $AD' = BD$, получаем, что $BD = AC$.