XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Бабушка с внуком пошли в кино. Через 10 минут, когда они прошли ровно треть пути, бабушка вспомнила, что забыла билеты и отправила внука за ними. Внук прибежал домой, схватил билеты и побежал в кино. В итоге он добежал до кинотеатра на 10 минут раньше бабушки. Во сколько раз внук бегает быстрее, чем ходит бабушка? (С. Волченков, С. Берлов)

2. На одном острове жило племя Мумбо-Юмбо, в котором состояло ровно 50 островитян, среди которых половина рыцари, всегда говорящие правду и половина — лжецы, которые всегда лгут. В результате выборов нового вождя половина членов племени погибла от рук соплеменников. После этих трагических событий каждый из оставшихся островитян заявил, что убил ровно одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло уцелеть в этом племени?

3. Найдите все такие натуральные числа n такие, что сумма любых n простых чисел, больших 100, делится на n.

4. Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат 9×9 на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число k от 1 до 9 и удаляет все полоски длины k. Какое наибольшее число клеток Петя гарантированно может удалить независимо от действий Васи?

5. Существует ли такой пятиугольник, что для любого натурального числа n, большего 2, найдется шестиугольник, который можно разрезать без остатка на n копий этого пятиугольника?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Бабушка с двумя внуками пошла в кино. Через некоторое время бабушка вспомнила, что забыла очки и отправила одного внука за ними, а второго внука в кинотеатр посмотреть время начала сеанса. Первый внук прибежал домой, схватил очки и побежал в кино, а второй добежал до кинотеатра и побежал навстречу бабушке. Внуки встретились с бабушкой, когда она прошла ровно две трети пути от дома до кинотеатра. Во сколько раз внуки бегают быстрее, чем ходит бабушка, если известно, что бегают они с одинаковой скоростью?

2. Найдите все пары положительных чисел x и y, удовлетворяющих условиям $x\cdot[y] = 7$ и $y\cdot[x] = 8$. Через $[a]$ здесь обозначена *целая часть числа* a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат 10×10 на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число k, $1 \le k \le 10$, и удаляет все полоски длины k. Какое наибольшее число клеток Петя гарантированно может удалить независимо от действий Васи?

4. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что сумма квадратов любых n простых чисел, больших 3, делится на n.

5. Три луча OX, OY и OZ образуют друг с другом тупые углы. На луче OX взяты точки A_1 и A_2, на луче OY — B_1 и B_2, на луче OZ — C_1 и C_2 так, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны (так, что вершина A_1 соответствует A_2 и B_1 соответствует B_2). Докажите, что A_1 совпадает с A_2 и B_1 совпадает с B_2.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 19.02.2012

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В экзамене участвовало меньше 20 человек. Для успешной его сдачи надо было набрать 65 баллов. После проверки работ оказалось, что средний балл всех участников равен 66, средний балл сдавших экзамен — 71, а не сдавших — 56. Посмотрев на результаты, Министерство образования решило добавить всем по 5 баллов. После этого средний балл сдавших экзамен стал равен 75, а не сдавших — 59. Сколько человек сдавало экзамен?

2. Пусть $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = a_0 \cdot \ldots \cdot a_n + 4$ при всех $n \geq 0$. Докажите, что $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ при всех $n \geq 1$.

3. Три луча OX, OY и OZ образуют друг с другом тупые углы. На луче OX взяты точки A_1 и A_2, на луче OY — B_1 и B_2, на луче OZ — C_1 и C_2 так, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны (так, что вершина A_1 соответствует A_2 и B_1 соответствует B_2). Докажите, что $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$.

4. Найдите наибольшее n такое, что сумма четвертых степеней любых n простых чисел больших 10, делится на n.

5. Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат $10n \times 10n$, где n — натуральное число, большее 100, на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число k, $1 \leq k \leq 10n$, и удаляет все полоски длины k. Докажите, что Петя может гарантированно удалить не менее, чем $11n$ клеток.

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Бабушка с внуком пошли в кино. Через 10 минут, когда они прошли ровно треть пути, бабушка вспомнила, что забыла билеты и отправила внука за ними. Внук прибежал домой, схватил билеты и побежал в кино. В итоге он добежал до кинотеатра на 10 минут раньше бабушки. Во сколько раз внук бегает быстрее, чем ходит бабушка*?

Ответ: В 4 раза. Решение. За 10 минут бабушка прошла треть пути. Поэтому оставшиеся две трети она прошла за 20 минут. Значит, внук потратил на весь путь домой за билетами и оттуда до кинотеатра, составляющий 4/3 пути от дома до кинотеатра, 20–10 = 10 минут. Если внук проходит путь, вдвое больший, чем бабушка, за вдвое меньшее время, то он бегает вчетверо быстрее, чем ходит бабушка.

Задача 2. *На одном острове жило племя Мумбо-Юмбо, в котором состояло ровно 50 островитян, среди которых половина рыцари, всегда говорящие правду и половина — лжецы, которые всегда лгут. В результате выборов нового вождя половина островитян погибла от рук соплеменников. После этих трагических событий каждый из оставшихся островитян заявил, что убил ровно одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло уцелеть в этом племени?*

Ответ: 12. Решение. Каждый из уцелевших рыцарей убил ровно одного рыцаря. Поэтому уцелевших рыцарей не больше, чем убитых, то есть не больше 12. Пример: один из рыцарей убивает другого, затем половина оставшихся рыцарей убивает по одному из оставшихся, включая того, который убил первого рыцаря.

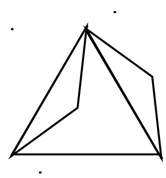
Задача 3. *Найдите все такие натуральные числа n такие, что сумма любых n простых чисел, больших 100, делится на n.*

Ответ: 2. Решение. Пусть $n > 2$, и сумма S каких-то n простых чисел, включая число 101, делится на n. Заменим 101 на 103, сохранив остальные числа. Сумма получившегося набора из n простых чисел, равная $S+2$, не делится на n.

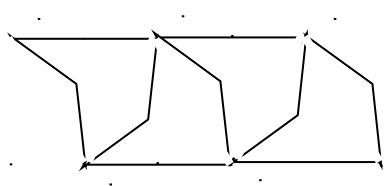
Задача 4. *Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат 9×9 на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число k от 1 до 9 и удаляет все полоски длины k. Какое наибольшее число клеток Петя гарантированно может удалить независимо от действий Васи?*

Ответ: 12. Решение. Вот пример разрезания на полоски, когда Пете не удастся удалить больше 12 клеток (разрезания по строкам): 9, 8+1, 7+2, 6+3, 6+3, 5+4, 5+4, 4+2+2+1, 3+3+2+1. Допустим, есть разрезание, где Пете не удастся удалить больше 11 клеток. Тогда в этом разрезании не больше, чем по одной полоске длины 9, 8, 7 и 6, не больше, чем по две полоски длины 5 и 4, не больше трех полосок длины 3, пяти полосок длины 2 и 11 полосок длины 1. Суммарная площадь этих полосок не больше 78, что меньше площади квадрата 9×9. Противоречие.

Задача 5. *Существует ли такой пятиугольник, что для любого натурального числа n, большего 2, найдется шестиугольник, который можно разрезать без остатка на n копий этого пятиугольника*?



Ответ: Да. Решение. Рассмотрим пятиугольник, полученный из правильного треугольника приклеиванием к одной из сторон равнобедренного треугольника и вырезанием аналогичного треугольника с другой стороны. Тогда несколько (два или больше) треугольников складываются следующим образом, образуя четырехугольник, у которого к одной стороне приклеен треугольник, а из другой вырезан аналогичный треугольник.



XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Бабушка с двумя внуками пошла в кино. Через некоторое время бабушка вспомнила, что забыла очки и отправила одного внука за ними, а второго внука в кинотеатр посмотреть время начала сеанса. Первый внук прибежал домой, схватил очки и побежал в кино, а второй добежал до кинотеатра и побежал навстречу бабушке. Внуки встретились с бабушкой, когда она прошла ровно две трети пути от дома до кинотеатра. Во сколько раз внуки бегают быстрее, чем ходит бабушка, если известно, что бегают они с одинаковой скоростью?*

<u>Ответ</u>: В 3 раза. <u>Решение</u>. Так как внуки встретились с бабушкой одновременно, они пробежали одинаковые расстояния. Сумма этих расстояний равна, очевидно, удвоенному расстоянию от дома до кинотеатра, поэтому каждое из них равно расстоянию от дома до кинотеатра. Такое возможно только если внуки побежали, когда бабушка прошла ровно треть пути до кинотеатра. Таким образом, за время, пока бабушка прошла треть пути до кинотеатра, каждый из внуков пробежал втрое большее расстояние, откуда и получаем ответ.

Задача 2. *Найдите все пары положительных чисел x и y, удовлетворяющих условиям $x\cdot[y] = 7$ и $y\cdot[x] = 8$. Через $[a]$ здесь обозначена* ***целая часть числа a****, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.*

<u>Ответ</u>: $x = 7$, $y = 8/7$; $x = 7/2$, $y = 8/3$. <u>Решение</u>. Допустим, $[y] \geq 3$. Тогда $x \leq 7/3 \Rightarrow [x] \leq 2 \Rightarrow y \geq 4 \Rightarrow [y] \geq 4 \Rightarrow x \leq 7/4 \Rightarrow [x] \leq 1 \Rightarrow [x] = 1$. Но тогда из первого уравнения $[y] = 7$, а из второго — $y = 8$ — противоречие. Поэтому $[y]$ равна 1 или 2. Рассматривая эти случаи, находим в каждом по одному ответу.

Задача 3. *Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат 10×10 на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число k, $1 \leq k \leq 10$, и удаляет все полоски длины k. Какое наибольшее число клеток Петя гарантированно может удалить независимо от действий Васи?*

<u>Ответ</u>: 12. <u>Решение</u>. Вот пример разрезания на полоски, когда Пете не удастся удалить больше 12 клеток (разрезания по строкам): 10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 6+4, 5+5, 4+2+2+2, 3+3+3+1. Допустим, есть разрезание, где Пете не удастся удалить больше 11 клеток. Тогда в этом разрезании не больше, чем по одной полоске длины 10, 9, 8, 7 и 6, не больше, чем по две полоски длины 5 и 4, не больше трех полосок длины 3, пяти полосок длины 2 и 11 полосок длины 1. Суммарная площадь этих полосок не больше 88, что меньше площади квадрата 10×10. Противоречие.

Задача 4. *Найдите наибольшее натуральное число n такое, что сумма квадратов любых n простых чисел, больших 3, делится на n.*

<u>Ответ</u>:12. <u>Решение</u>. Любое простое число, большее 3, можно представить либо в виде $6n+1$, либо в виде $6n-1$. Заметим, что $(6n\pm1)^2 = 36n^2\pm12n+1 = 24n^2+12n(n\pm1)+1$. Заметим, что первые два слагаемых последней суммы делятся на 12 (так как произведение $n(n\pm1)$ четно). Поэтому квадрат любого простого числа, большего 3, дает при делении на 24 остаток 1. Поэтому сумма 24 таких квадратов всегда делится на 24. С другой стороны, если в наборе из n простых чисел есть пятерка, и мы заменим ее семеркой, сумма квадратов этих чисел увеличится на 24. Поэтому все искомые n должны быть делителями числа 24, откуда и вытекает ответ.

Задача 5. *Три луча OX, OY и OZ образуют друг с другом тупые углы. На луче OX взяты точки A_1 и A_2, на луче OY — B_1 и B_2, на луче OZ — C_1 и C_2 так, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны (так, что вершина A_1 соответствует A_2 и B_1 соответствует B_2). Докажите, что A_1 совпадает с A_2 и B_1 совпадает с B_2.*

<u>Решение</u>. Допустим, $OA_2 > OA_1$ и $OB_2 > OB_1$. Проведем через точку A_2 прямую, параллельную A_1B_1. Пусть она пересекает луч OY в точке D. Угол A_2DO острый, поэтому угол A_2DB_2 — тупой, откуда $A_2B_2 \geq A_2D > A_1B_1$. Неравенство $A_2B_2 > A_1B_1$ верно и в случае, когда $A_1 = A_2$, $OB_2 > OB_1$, поскольку угол $A_2B_1B_2$ — тупой. Таким образом, если $A_1B_1 = A_2B_2$, и не выполнено хотя бы одно из равенств $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$, то (если нужно, после замены обозначений A на B и B на A) $OA_2 < OA_1$ и

$OB_2 > OB_1$. Но тогда из равенства $B_1C_1 = B_2C_2$ аналогично получаем, что $OC_2 < OC_1$, а из равенства $C_1A_1 = C_2A_2$ — что $OA_2 > OA_1$. Противоречие.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *В экзамене участвовало меньше 20 человек. Для успешной его сдачи надо было набрать 65 баллов. После проверки работ оказалось, что средний балл всех участников равен 66, средний балл сдавших экзамен — 71, а не сдавших — 56. Посмотрев на результаты, Министерство образования решило добавить всем по 5 баллов. После этого средний балл сдавших экзамен стал равен 75, а не сдавших — 59. Сколько человек сдавало экзамен?*

Ответ: 12. Решение. Пусть экзамен сдавало a человек, сначала его сдало x человек, а после добавления 5 баллов — y человек. Тогда из условия следует, что $66a = 71x+56(a-x)$ и $71a = 75y+59(a-y)$. После преобразований первое из этих уравнений приводится к виду $2a = 3x$, а второе — к виду $3a = 4y$. Отсюда следует, что число a делится на 3 и на 4. Единственное такое число, меньшее 20 — это 12.

Задача 2. *Пусть $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = a_0\cdot\ldots\cdot a_n+4$ при всех $n \geq 0$. Докажите, что $a_n-\sqrt{a_{n+1}} = 2$ при всех $n \geq 1$.*

Решение. Заметим, что $a_{n+1} = a_0\cdot\ldots\cdot a_n +4 = (a_n-4)a_n+4 = (a_n-2)^2$. Поскольку при $n \geq 1$ $a_n > 4$, $a_n-\sqrt{a_{n+1}} = a_n-(a_n-2) = 2$.

Задача 3. *Три луча OX, OY и OZ образуют друг с другом тупые углы. На луче OX взяты точки A_1 и A_2, на луче OY — B_1 и B_2, на луче OZ — C_1 и C_2 так, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны (так, что вершина A_1 соответствует A_2 и B_1 соответствует B_2). Докажите, что A_1 совпадает с A_2 и B_1 совпадает с B_2.*

Решение. Допустим, $OA_2 > OA_1$ и $OB_2 > OB_1$. Проведем через точку A_2 прямую, параллельную A_1B_1. Пусть она пересекает луч OY в точке D. Угол A_2DO острый, поэтому угол A_2DB_2 — тупой, откуда $A_2B_2 \geq A_2D > A_1B_1$. Неравенство $A_2B_2 > A_1B_1$ верно и в случае, когда $A_1 = A_2$, $OB_2 > OB_1$, поскольку угол $A_2B_1B_2$ — тупой. Таким образом, если $A_1B_1 = A_2B_2$, и не выполнено хотя бы одно из равенств $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$, то (если нужно, после замены обозначений A на B и B на A) $OA_2 < OA_1$ и $OB_2 > OB_1$. Но тогда из равенства $B_1C_1 = B_2C_2$ аналогично получаем, что $OC_2 < OC_1$, а из равенства $C_1A_1 = C_2A_2$ — что $OA_2 > OA_1$. Противоречие.

Задача 4. *Найдите наибольшее n такое, что сумма четвертых степеней любых n простых чисел больших 10, делится на n.*

Ответ: 240. Решение. Нетрудно проверить, что четвёртая степень любого простого числа, большего 10, дает остатки 1 при делении на 3, 5 и 16. Поэтому сумма любых 240 четвертых степеней простых чисел, больших 10, делится на 3, 5 и 16, а, поскольку эти числа попарно взаимно просты, и на их произведение 240. С другой стороны, если в наборе из n простых чисел заменим 11 на 13, сумма четвертых степеней этих чисел увеличится на $240\cdot78$, а если затем 13 заменим на 17, сумма четвертых степеней увеличится на $240\cdot229$. Поскольку числа 229 и 78 взаимно просты, всякое n, удовлетворяющее условию задачи, должно быть делителем числа 240, что и завершает доказательство.

Задача 5. *Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат $10n\times10n$, где n — натуральное число, большее 100, на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число k, $1 \leq k \leq 10n$, и удаляет все полоски длины k. Докажите, что Петя может гарантированно удалить не менее, чем $11n$ клеток.*

Решение. Пусть есть разрезание, при котором Петя не может удалить $11n$ или более клеток. Тогда в этом разрезании полосок длиной от $6n$ до $10n$ будет по одной, а суммарная длина полосок длины k при каждом $k < 6n$ будет меньше $11n$. Поэтому суммарная площадь всех полосок в этом случае будет меньше, чем $6n\cdot11n= 66n^2$ плюс сумма всех натуральных чисел от $6n+1$ до $10n$, равная $32n^2+2n \leq 34n^2$, что равно как раз площади квадрата $10n\times10n$. Противоречие.