КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 22.10.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов, пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша подсчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?

2. 2011 человек стоят по кругу. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из 2011 человек сказал: «Все кроме, возможно, меня и моих соседей — лжецы». Сколько может быть лжецов среди этих 2011 человек?

3. Найдите хотя бы одно решение ребуса НЕВА + УРАЛ = ВОЛГА, где одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными — разные.

4. На столе лежит $n > 3$ монет. За одну операцию можно перевернуть любые n–3 монеты. При каких n такими операциями можно перевернуть все n монет?

5. Из восьмизначного числа вычеркнули две средние цифры и исходное число разделили на полученное. В частном оказалось натуральное число. Каким оно может быть?

6. Шахматная доска разрезана на 32 доминошки (прямоугольника 1×2). Докажите, что среди горизонтальных доминошек поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый.

7. Игральный автомат «Однорукий математик» может сделать из числа n число $2n$ или наоборот, а игральный автомат «Монти Карло» может сделать из числа n число $3n+1$ и наоборот. Докажите, что эти автоматы могут превратить любое натуральное число в 1 (при этом в процессе могут получаться и нецелые числа).

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 22.10.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. 2011 человек стоят по кругу. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из 2011 человек сказал: «Все кроме, возможно, меня и моих соседей — лжецы». Сколько может быть лжецов среди этих 2011 человек?

2. На столе стоят 16 банок, образуя квадрат 4×4. Известно, что в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду и двух диагональных рядах общий объем воды в банках равен 1 литру. Сколько может быть суммарно воды в четырех угловых банках?

3. Из чисел 1, 2, …, 2010 произвольным образом выбрали 673 числа. Докажите, что среди выбранных чисел есть два, сумма которых делится на 6.

4. Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle DAB = 92°$, $\angle ABC = 91°$, $\angle BCD = 90°$. Докажите, что $AB < CD$.

5. Шахматная доска разрезана на 32 доминошки (прямоугольника 1×2). Докажите, что среди горизонтальных доминошек поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый.

6. За ход число x можно заменить на одно из следующих чисел: $x/2$, $2x$, $(x-1)/3$, $3x+1$. Докажите, что из любого натурального числа за несколько ходов можно получить число 1. (В процессе разрешается получать нецелые числа.)

7. Решите в целых числах уравнение $x+x^3 = 5y^2$.

8. Целые числа $x_1, x_2, x_3, ..., x_{50}$ удовлетворяют равенствам

$$|x_1-x_2| = 2|x_2-x_3| = 3|x_3-x_4| = ... = 49|x_{49}-x_{50}| = 50|x_{50}-x_1|.$$

Докажите, что они равны.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 22.10.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. 2011 человек стоят по кругу. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из 2011 человек сказал: «Все кроме, возможно, меня и моих соседей — лжецы». Сколько может быть лжецов среди этих 2011 человек?

2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = 90°$, $\angle ABC = \angle BCD = 60°$, $|AB| = 5$, $|CD| = 4$. Найдите $|BC|$.

3. Докажите, что для любых положительных a, b и c выполняется неравенство $\frac{(a+b-c)^2+1}{c}+\frac{(b+c-a)^2+1}{a}+\frac{(c+a-b)^2+1}{b}\geq 6$.

4. Шахматная доска разрезана на 32 доминошки (прямоугольника 1×2). Докажите, что среди горизонтальных доминошек поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый.

5. Игральный автомат «Однорукий математик» может сделать из числа n число $2n$ или наоборот, а игральный автомат «Монти Карло» может сделать из числа n число $3n+1$ и наоборот. Докажите, что эти автоматы могут превратить любое натуральное число в 1 (при этом все промежуточные числа тоже должны быть натуральными).

6. Решите в целых числах уравнение $x+x^3 = 5y^2$.

7. В треугольнике ABC сторона AB длиннее стороны BC, точка D — середина AC. Биссектриса угла B пересекает AC в точке E. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного из C на BE. G — точка пересечения CF и BD. Докажите, что прямая DF делит отрезок EG на две равные части.

8. В стране $n \geq 2$ городов, каждые два из которых соединены прямым автобусным сообщением в обе стороны. Сколькими способами можно попасть из города A в другой город B, проехав на автобусе ровно k раз? Маршрут может проходить через любой город (в том числе A и B), а также использовать любой рейс между городами более одного раза.

XXXVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 21-27.10.2011

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. *Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов, пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша подсчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?*

Ответ: 90. Решение. Пока папа делает 9 шагов, Маша делает 15 шагов, и при этом Яша делает 25 шагов. Таким образом, пока папа делает 9 шагов, Маша и Яша в сумме делают 40 шагов. Всего Маша и Яша в сумме сделали 400 шагов – в 10 раз больше, чем 40. Поэтому и папа сделает в 10 раз больше шагов, чем 9, то есть 90.

Задача 2. *2011 человек стоят по кругу. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из 2011 человек сказал: «Все кроме, возможно, меня и моих соседей — лжецы». Сколько может быть лжецов среди этих 2011 человек?*

Ответ: 2009. Решение. Все лжецами быть не могут, поскольку тогда все говорили бы правду. Возьмём рыцаря А. Все, кроме, возможно, А и его соседей — лжецы. Оба соседа А лжецами быть не могут, потому что тогда они говорили бы правду. Рыцарями оба они тоже быть не могут, потому что тогда оба лгали бы. А вот случай, когда один из них рыцарь, а другой — нет, возможен, что и даёт ответ.

Задача 3. *Найдите хотя бы одно решение ребуса НЕВА + УРАЛ = ВОЛГА, где одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными — разные.*

Ответ. Например, 7418+5680 = 13098.

Задача 4. *На столе лежит $n > 3$ монет. За одну операцию можно перевернуть любые $n–3$ монеты. При каких n такими операциями можно перевернуть все n монет?*

Ответ. При всех чётных, и только при них. Решение. Чтобы все монеты оказались перевёрнутыми, надо, чтобы каждую из них переворачивали нечётное число раз. Если число n нечётно, то и общее число переворачиваний должно быть нечётным, что невозможно, поскольку число $n–3$ в это случае чётно. Пусть теперь n чётно. Выложим все монеты по кругу. Перевернём любые $n–3$ из них, идущие подряд. Затем перевернём $n–3$ следующих за ними монет и т.д., n раз. В итоге будет совершено $n(n–3)$ переворачиваний, и каждая монета, как нетрудно видеть, перевернётся одно и то же число раз, равное $n–3$. Осталось заметить, что при чётном n число $n–3$ нечётно.

Задача 5. *Из восьмизначного числа вычеркнули две средние цифры и исходное число разделили на полученное. В частном оказалось натуральное число. Каким оно может быть?*

Ответ. 100. Решение. Умножим полученное после вычёркивания шестизначное число на 100 и вычтем результат из исходного восьмизначного числа. Поскольку первые три цифры уменьшаемого вычитаемого совпадают, разность окажется самое большее пятизначной. В то же время она должна нацело делиться на шестизначное число. Значит, разность равна 0, откуда и получается ответ.

Задача 6. *Шахматная доска разрезана на 32 доминошки (прямоугольника 1×2). Докажите, что среди горизонтальных доминошек поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый.*

Решение. Рассмотрим крайнюю левую вертикаль. В ней поровну чёрных и белых клеток, и вертикальные доминошки занимают в ней поровну чёрных и белых клеток. Поэтому среди горизонтальных доминошек, левый квадратик которых лежит в крайней левой вертикали, поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый. Рассмотрим вторую слева вертикаль. В ней поровну чёрных и белых клеток, вертикальные доминошки занимают в ней поровну чёрных и белых клеток, и горизонтальные доминошки, у которых левый квадратик лежит в предыдущем левом ряду, как уже доказано, занимают в ней поровну чёрных и белых клеток. Оставшиеся клетки принадлежат горизонтальным доминошкам с крайней левой клеткой во второй вертикали. Стало быть, среди них тоже поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый. Таким же образом по очереди рассматриваем и все остальные вертикали доски.

Задача 7. *Игральный автомат «Однорукий математик» может сделать из числа n число $2n$ или наоборот, а игральный автомат «Монти Карло» может сделать из числа n число $3n+1$ и наоборот. Докажите, что эти автоматы могут превратить любое натуральное число в 1 (при этом в процессе могут получаться и нецелые числа).*

Решение. Достаточно показать, что мы можем уменьшить любое число на 1. Сделать это можно так:

$$n+1 \to 3n+4 \to 3n/2+2 \to 3n/4+1 \to n/4 \to n/2 \to n.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *2011 человек стоят по кругу. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из 2011 человек сказал: «Все кроме, возможно, меня и моих соседей — лжецы». Сколько может быть лжецов среди этих 2011 человек?*

Ответ: 2009. Решение. Все лжецами быть не могут, поскольку тогда все говорили бы правду. Возьмём рыцаря А. Все, кроме, возможно, А и его соседей — лжецы. Оба соседа А лжецами быть не могут, потому что тогда они говорили бы правду. Рыцарями оба они тоже быть не могут, потому что тогда оба лгали бы. А вот случай, когда один из них рыцарь, а другой — нет, возможен, что и даёт ответ.

Задача 2. *На столе стоят 16 банок, образуя квадрат 4×4. Известно, что в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду и двух диагональных рядах общий объем воды в банках равен 1 литру. Сколько может быть суммарно воды в четырех угловых банках?*

Ответ: 1 литр. Решение. Сложим объёмы воды в двух средних вертикальных рядах и двух средних горизонтальных рядах, а потом вычтем из полученной суммы общий объём воды на обеих диагоналях. В итоге получим 2 литра. При этом объём воды в каждой банке, кроме угловых, один раз прибавился, а объем воды в каждой из угловых банок один раз вычелся. Если же сложить объёмы воды во всех 16 банках, получится 4 литра. Таким образом, удвоенный объём воды в угловых банках равен 4–2 = 2 л, откуда и получается ответ.

Задача 3. *Из чисел 1, 2, ..., 2010 произвольным образом выбрали 673 числа. Докажите, что среди выбранных чисел есть два, сумма которых делится на 6.*

Решение. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда среди выбранных чисел не более одного, делящегося на 6, и не более одного, дающего при делении на 6 остаток 3 (иначе сложим два таких числа и получим сумму, делящуюся на 6). Кроме того, если есть число с остатком 1, то нет чисел с остатком 5, и если есть число с остатком 2, то нет чисел с остатком 4. Стало быть, среди выбранных есть 671 число, дающее при делении на 6 какие-то два из остатков 1, 2, 4 или 5. Но каждый из остатков от деления на 6 встречается среди чисел 1, 2, …, 2010 ровно 2010/6 = 335 раз, так что чисел, дающих два данных остатка, у нас может быть не более 670. Противоречие.

Задача 4. *Про четырехугольник ABCD известно, что $\angle DAB = 92°$, $\angle ABC = 91°$, $\angle BCD = 90°$. Докажите, что $AB < CD$.*

Решение. Продолжим стороны AB и CD за вершины B и C соответственно до пересечения в точке E. Точка E окажется именно там, поскольку сумма углов ABC и BCD больше 180°. В треугольнике EBC $89° = \angle EBC < \angle ECB = 90°$. Поэтому $EB > EC$. С другой стороны, в треугольнике EAD угол ADE равен $360°–92°–91°–90° = 87°$, а угол EAB равен 92°. Поэтому $ED > EA$. Отсюда и получаем $AB = EA–EB < ED–EC = CD$.

Задача 5. *Шахматная доска разрезана на 32 доминошки (прямоугольника 1×2). Докажите, что среди горизонтальных доминошек поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый.*

Решение. Рассмотрим крайнюю левую вертикаль. В ней поровну чёрных и белых клеток, и вертикальные доминошки занимают в ней поровну чёрных и белых клеток. Поэтому среди горизонтальных доминошек, левый квадратик которых лежит в крайней левой вертикали, поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый. Рассмотрим вторую слева вертикаль. В ней поровну чёрных и белых клеток, вертикальные доминошки занимают в ней поровну чёрных и белых клеток, и горизонтальные доминошки, у которых левый квадратик лежит в предыдущем левом ряду, как уже доказано, занимают в ней поровну чёрных и белых клеток. Оставшиеся клетки принадлежат горизонтальным доминошкам с крайней левой клеткой во второй вертикали. Стало быть, среди них тоже поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый. Таким же образом по очереди рассматриваем и все остальные вертикали доски.

Задача 6. *За ход число x можно заменить на одно из следующих чисел: $x/2$, $2x$, $(x-1)/3$, $3x+1$. Докажите, что из любого натурального числа за несколько ходов можно получить число 1. (В процессе разрешается получать нецелые числа.)*

Решение. Достаточно показать, что мы можем уменьшить любое число на 1, например, так:

$$n+1 \to 3n+4 \to 3n/2+2 \to 3n/4+1 \to n/4 \to n/2 \to n.$$

Задача 7. *Решите в целых числах уравнение $x+x^3 = 5y^2$.*

Решение. Левая часть $x+x^3$ раскладывается на два сомножителя x и x^2+1, которые, очевидно, взаимно просты. Поэтому эти сомножители имеют вид a^2 и $5b^2$. Если $x^2+1 = a^2$, то $x = 0$ и $y = 0$. Если же $x = a^2$, то $5b^2 = x^2+1 = a^4+1$. Но a^4+1 не делится на 5 ни при каком целом a, в чем можно убедиться перебором остатков.

Задача 8. *Целые числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{50}$ удовлетворяют равенствам*

$$|x_1-x_2| = 2|x_2-x_3| = 3|x_3-x_4| = \ldots = 49|x_{49}-x_{50}| = 50|x_{50}-x_1|.$$

Докажите, что они равны.

Решение. Пусть $|x_1-x_2| = a$. Тогда $|x_2-x_3| = a/2$, …, $|x_{50}-x_1| = a/50$. Заметим, что сумма всех подмодульных выражений в этих равенствах равна 0. Это означает, что мы можем так расставить знаки + и – между числами a, $a/2$, …, $a/50$, что значение полученного выражения будет равняться 0. Допустим, не все числа равны. Тогда $a \neq 0$, и на него в описанном равенстве нулю можно сократить. Это значит, что между дробями 1/1, 1/2, …, 1/50 можно расставить знаки + и – так, чтобы результат равнялся 0. Но тогда дробь 1/29 мы сумели бы из полученного равенства выразить с помощью операций сложения и вычитания через дроби, знаменатели которых не делятся на простое число 29, что, очевидно, невозможно.

XXXVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 21-27.10.2011

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *2011 человек стоят по кругу. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из 2011 человек сказал: «Все кроме, возможно, меня и моих соседей — лжецы». Сколько может быть лжецов среди этих 2011 человек?*

<u>Ответ</u>: 2009. <u>Решение</u>. Все лжецами быть не могут, поскольку тогда все говорили бы правду. Возьмём рыцаря А. Все, кроме, возможно, А и его соседей — лжецы. Оба соседа А лжецами быть не могут, потому что тогда они говорили бы правду. Рыцарями оба они тоже быть не могут, потому что тогда оба лгали бы. А вот случай, когда один из них рыцарь, а другой — нет, возможен, что и даёт ответ.

Задача 2. *В четырехугольнике ABCD $\angle DAB = 90°$, $\angle ABC = \angle BCD = 60°$, $|AB| = 5$, $|CD| = 4$. Найдите $|BC|$.*

<u>Ответ</u>: $BC = 6$. <u>Решение</u>. Продолжим прямую BC до пересечения с AD в точке E. Треугольник BCE — равносторонний, а в треугольнике ADE углы D и A равны 30° и 90° соответственно. Поэтому $DE = 2AE$ и $BA+AE = CD+DE = CD+2AE$, то есть $5+AE = 4+2AE$, откуда $AE = 1$ и $BC = BE = 6$.

Задача 3. *Докажите, что для любых положительных a, b и c выполняется неравенство.* $\frac{(a+b-c)^2+1}{c}+\frac{(b+c-a)^2+1}{a}+\frac{(c+a-b)^2+1}{b}\ge 6$

<u>Решение</u>. Применим к каждому числителю неравенство $x^2+1 \ge 2x$. Получится

$$\frac{(a+b-c)^2+1}{c}+\frac{(b+c-a)^2+1}{a}+\frac{(c+a-b)^2+1}{b}\ge\frac{2(a+b-c)}{c}+\frac{2(b+c-a)}{a}+\frac{2(c+a-b)}{b}\ge$$

$$\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-3\right)\ge 2(6-3)\ge 6.$$

Задача 4. *Шахматная доска разрезана на 32 доминошки (прямоугольника 1×2). Докажите, что среди горизонтальных доминошек поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый.*

<u>Решение</u>. Рассмотрим крайнюю левую вертикаль. В ней поровну чёрных и белых клеток, и вертикальные доминошки занимают в ней поровну чёрных и белых клеток. Поэтому среди горизонтальных доминошек, левый квадратик которых лежит в крайней левой вертикали, поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый. Рассмотрим вторую слева вертикаль. В ней поровну чёрных и белых клеток, вертикальные доминошки занимают в ней поровну чёрных и белых клеток, и горизонтальные доминошки, у которых левый квадратик лежит в предыдущем левом ряду, как уже доказано, занимают в ней поровну чёрных и белых клеток. Оставшиеся клетки принадлежат горизонтальным доминошкам с крайней левой клеткой во второй вертикали. Стало быть, среди них тоже поровну тех, у которых левый квадратик черный, и тех, у которых левый квадратик белый. Таким же образом по очереди рассматриваем и все остальные вертикали доски.

Задача 5. *Игральный автомат «Однорукий математик» может сделать из числа n число 2n или наоборот, а игральный автомат «Монти Карло» может сделать из числа n число 3n+1 и наоборот. Докажите, что эти автоматы могут превратить*

любое натуральное число в 1 (при этом все промежуточные числа тоже должны быть натуральными).

Решение. Достаточно показать, что автоматы могут уменьшить любое число, большее 1. В зависимости от остатка, который даёт n при делении на 3, это может быть сделано так:

$3k+1 \to k$, $3k+2 \to 6k+4 \to 2k+1$, $3k \to 9k+1 \to 18k+2 \to 36k+4 \to 12k+1 \to 4k \to 2k$.

Задача 6. *Решите в целых числах уравнение $x+x^3 = 5y^2$.*

Решение. Левая часть $x+x^3$ раскладывается на два сомножителя x и x^2+1, которые, очевидно, взаимно просты. Поэтому эти сомножители имеют вид a^2 и $5b^2$. Если $x^2+1 = a^2$, то $x = 0$ и $y = 0$. Если же $x = a^2$, то $5b^2 = x^2+1 = a^4+1$. Но a^4+1 не делится на 5 ни при каком целом a, в чем можно убедиться перебором остатков.

Задача 7. *В треугольнике ABC сторона AB длиннее стороны BC, точка D — середина AC. Биссектриса угла B пересекает AC в точке E. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного из C на BE. G — точка пересечения CF и BD. Докажите, что прямая DF делит отрезок EG на две равные части.*

Решение. Так как $|AB| > |BC|$, точка E ближе к C, чем к A, то есть лежит между D и C. Далее, F лежит на отрезке BE, а не на его продолжении, так как углы EBC, равный половине угла ABC, и BEC, равный $\angle A+\angle B/2 < (\angle A+\angle B+\angle C)/2$ — острые. Поэтому и точка G лежит внутри отрезка BD.

Продолжим CF до пересечения с AB в точке K. Точка K симметрична C относительно BE, поэтому F — середина CK, и DF — средняя линия треугольника CAK — параллельна AK. Поэтому треугольники KGB и FGD подобны, и

$$|DG|/|BG| = |FD|/|KB| = |AK|/2|KB| = (|AB|-|BC|)/2|BC|.$$

С другой стороны, по свойству биссектрисы $|CE| = |BC|\cdot|AC|/(|AB|+|BC|)$, значит, $|DE| = |AC|/2-|BC|\cdot|AC|/(|AB|+|BC|) = (|AB|-|BC|)/2(|AB|+|BC|)$. Поэтому

$$|DE|/|CE| = (|AB|-|BC|)/2|BC| = |DG|/|BG|,$$

откуда $EG \parallel BC$. Отсюда $\angle EGF = \angle FCB = \angle FKB = \angle GFD$, аналогично $\angle GEF = 90°-\angle EGF = 90°-\angle GFD = \angle DFE$, и FD проходит через середину гипотенузы GE треугольника FGE, что и требовалось доказать.

Задача 8. *В стране $n \geq 2$ городов, каждые два из которых соединены прямым автобусным сообщением в обе стороны. Сколькими способами можно попасть из города A в другой город B, проехав на автобусе ровно k раз? Маршрут может проходить через любой город (в том числе A и B), а также использовать любой рейс между городами более одного раза.*

Ответ: $\dfrac{(n-1)^k-(-1)^k}{n}$. Решение. Обозначим через a_k количество маршрутов длины k из A в B. Выедем из города A и будем ехать каждый раз в произвольный город. На каждом шаге у нас будет ровно $n-1$ вариант, поэтому всего маршрутов длины $k-1$ выходящих из A, будет ровно $(n-1)^{k-1}$. Заметим, что каждый такой маршрут либо заканчивается в городе B, либо можно сделать еще один ход в B. Поэтому $(n-1)^{k-1} = a_k+a_{k-1}$ (*). Теперь искомую формулу можно доказать методом математической индукции: базой является $a_1 = 1$, а переход следует из формулы (*).