# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Куб 3×3×3 состоит из 27 единичных кубиков. В центре одного из кубиков сидит кубогрызка, которая может перебираться по прямой в центр соседнего кубика (то есть имеющего с ее нынешним кубиком общую грань). Добравшись до центра нового кубика, кубогрызка поворачивает на 90°. Какую наибольшую длину может иметь замкнутый маршрут кубогрызки, не проходящий ни через какой кубик, кроме начального, больше одного раза, и возвращающийся в начальный только один раз под прямым углом к начальному ходу?

**2.** В равнобочной трапеции $ABCD$ из точки $B$ опущена высота на большее основание $AD$ и на ее продолжении взята точка $E$. Отрезки $EC$ и $BD$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что $S_{PED} = S_{EBA}+S_{BPC}$.

**3.** Решите в целых неотрицательных числах уравнение $(xy-7)^2 = x^2+y^2$.

**4.** Докажите, что $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}$ при всех положительных $a$, $b$ и $c$.

**5.** На столе лежат $n$ камней. Два игрока по очереди берут камни из кучи; каждый игрок при своем ходе может взять любое количество камней, являющееся квадратом натурального числа. Проигрывает не имеющий хода. Докажите, что для бесконечно многих $n$ второй игрок может обеспечить себе победу.

**6.** Дано натуральное число $k > 1$. Какое наибольшее количество прямых можно расположить на плоскости таким образом, чтобы среди любых $k$ из них нашлись две прямые, образующие угол 60°?

**7.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 120° и $BC = 2AB$. Найдите угол между медианами $AM$ и $BK$.

**8.** Существует ли такое нецелое положительное число $x$, что $[x]^3+x^2 = x^3+[x]^2$? (Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Дан клетчатый квадрат 9×9. В центре одного из квадратиков сидит квадрогрызка, которая может перебираться по прямой в центр соседнего (по стороне) квадратика. Добравшись до центра нового квадратика, квадрогрызка поворачивает на 90°. Какую наибольшую длину может иметь замкнутый маршрут квадрогрызки, не проходящий ни через какой квадратик больше одного раза?

**2.** Точка $D$ лежит внутри треугольника $ABC$. На сторонах этого треугольника построены внешним образом прямоугольники $BCEF$, $CAGH$ и $ABKL$, площадь каждого из которых вдвое больше площади треугольника $ABC$. Докажите, что сумма площадей треугольников $DEF$, $DGH$ и $DKL$ в четыре раза больше площади треугольника $ABC$.

**3.** Решите в целых неотрицательных числах уравнение $(xy-7)^2 = x^2+y^2$.

**4.** Докажите, что $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}\geq\dfrac{3a+2b-c}{4}$ при всех положительных $a$, $b$ и $c$.

**5.** На столе лежат $n$ камней. Два игрока по очереди берут камни из кучи; каждый игрок при своем ходе может взять любое количество камней, являющееся квадратом натурального числа. Проигрывает не имеющий хода. Докажите, что для некоторого $n > 1000000$ второй игрок может обеспечить себе победу.

**6.** Дано натуральное число $k > 1$. Какое наибольшее количество прямых можно расположить на плоскости таким образом, что среди любых $k$ из них нашлись две прямые, образующие угол 90°?

**7.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 120° и $BC = 2AB$. Найдите угол между медианами $AM$ и $BK$.

**8.** Существует ли такое нецелое положительное число $x$. что $[x]+x^2 = x+[x]^2$? (Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Квадрат 9×9 состоит из 81 единичного квадратика. В центре одного из квадратиков сидит квадрогрызка, которая может перебираться по прямой в центр соседнего по стороне квадратика. Добравшись до центра нового квадратика, квадрогрызка поворачивает на 90°. Какую наибольшую длину может иметь замкнутый маршрут квадрогрызки, не проходящий ни через какой квадратик, кроме начального, больше одного раза, и возвращающийся в начальный только один раз?

**2.** Точка $D$ лежит внутри треугольника $ABC$. На сторонах этого треугольника построены внешним образом прямоугольники $BCEF$, $CAGH$ и $ABKL$, площадь каждого из которых вдвое больше площади треугольника $ABC$. Докажите, что сумма площадей треугольников $DEF$, $DGH$ и $DKL$ в четыре раза больше площади треугольника $ABC$.

**3.** Над пятизначным числом проводят следующую операцию: заменяют одну из его цифр на последнюю цифру суммы цифр данного числа. Какое наименьшее число можно получить из числа 13579 несколькими такими операциями?

**4.** Докажите, что $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{1}{1+b}\geq\dfrac{3a-b+2}{4}$ при всех положительных $a$ и $b$.

**5.** Участники олимпиады устроили вечеринку, договорившись разделить расходы поровну. Получив счет на \$1680, они посчитали было, сколько нужно заплатить каждому участнику, но вдруг заметили, что четыре человека уже ушли, из-за чего взнос каждого из оставшихся возрос на \$1. Сколько человек участвовало в вечеринке?

**6.** Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых пяти из них нашлись две, образующие угол в 90°?

**7.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 120° и $BC = 2AB$. Найдите угол между медианами $AM$ и $BK$.

**8.** Существует ли такое нецелое положительное число $x$, что $[x]^2+x = x^2+[x]$? (Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** На столе лежат $a$ красных, $b$ синих и $c$ белых бусин (причем есть хотя бы по одной бусине каждого цвета). Петя и Вася ходят по очереди. За каждый ход игрок берет со стола две или три бусины. Первым ходит Петя. Побеждает тот игрок, после хода которого со стола исчезнут бусины хотя бы одного из цветов. При каких значениях $a$, $b$ и $c$ Петя имеет выигрышную стратегию?

**2.** Даны различные простые числа $a$, $b$, $c$ и $d$. Докажите неравенство $abc+bcd+cda+abd+173 \le 2abcd$.

**3.** Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых ста из них нашлись две перпендикулярные?

**4.** Существует ли такое нецелое положительное число $x$, что $[x]^3+x^2 = x^3+[x]^2$? (Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

**5.** Найдите все пары натуральных чисел $a$ и $b$, для которых $4^a+4a^2+4 = b^2$.

**6.** Про натуральное число $n$ известно три факта:
1) Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно.
2) Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно.
3) Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.
Чему может быть равно число $n$?

**7.** На стороне $CD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена такая точка $E$, что $AD = DE$. На отрезке $AE$ отмечена такая точка $F$, что $AF = EC$. Известно, что $\angle ADB = \angle BDC = 90°-\angle ABE$. Докажите, что $BF = BC$.

**8.** Дан клетчатый квадрат 9×9. В центре одного из квадратиков сидит квадрогрызка, которая может перебираться по прямой в центр соседнего по стороне квадратика. Добравшись до центра нового квадратика, квадрогрызка поворачивает на 90°. Какую наибольшую длину может иметь замкнутый маршрут квадрогрызки, не проходящий ни через какой квадратик, кроме начального, больше одного раза, и возвращающийся в начальный только один раз?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** На столе лежат $a$ красных, $b$ синих и 4 белых бусины (причем есть хотя бы по одной красной и синей бусине). Петя и Вася ходят по очереди. За каждый ход игрок берет со стола две или три бусины. Первым ходит Петя. Побеждает тот игрок, после хода которого со стола исчезнут бусины хотя бы одного из цветов. При каких значениях $a$ и $b$ Петя имеет выигрышную стратегию?

**2.** Даны различные простые числа $a$, $b$ и $c$. Докажите, что $ab+bc+ca+29 \le 2abc$.

**3.** Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых трех из них нашлись две перпендикулярные?

**4.** Существует ли такое нецелое положительное число $x$, что $[x]^3+x^2 = x^3+[x]^2$? (Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

**5.** Найдите все пары $(m,n)$ натуральных чисел, для которых число $4(mn+1)$ делится на $(m+n)^2$.

**6.** Про натуральное число $n$ известно три факта:

1) Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно.

2) Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно.

3) Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.

Чему может быть равно число $n$?

**7.** На стороне $CD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена такая точка $E$, что $AD = DE$. На отрезке $AE$ отмечена такая точка $F$, что $AF = EC$. Известно, что $\angle ADB = \angle BDC = 90° - \angle ABE$. Докажите, что $BF = BC$.

**8.** За круглым столом сидят 180 человек, каждый из которых — рыцарь или лжец. Каждый из них произнес фразу: «Среди 17 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, не менее 9 лжецов». Сколько рыцарей может сидеть за этим столом?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** На столе лежат 5 красных, 6 синих и 6 белых бусин. Петя и Вася ходят по очереди. За каждый ход игрок берет со стола две или три бусины. Первым ходит Петя. Побеждает тот игрок, после хода которого со стола исчезнут бусины хотя бы одного из цветов. Кто выигрывает при правильной игре?

**2.** Даны различные простые числа $p$ и $q$. Докажите, что $p+q+7 \leq 2pq$.

**3.** Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых трех из них нашлись две перпендикулярные?

**4.** Существует ли такое нецелое положительное число $x$, что $[x]^2+x = x^2+[x]$? (Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

**5.** Найдите все пары $(m,n)$ натуральных чисел, для которых число $4(mn+1)$ делится на $(m+n)^2$.

**6.** Про натуральное число $n$ известно три факта:
1) Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно.
2) Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно.
3) Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.
Чему может быть равно число $n$?

**7.** Чтобы пронумеровать страницы объемистого тома по порядку, начиная с первой, печатник использовал 2010 цифр. Сколько страниц содержит том?

**8.** За круглым столом сидят 180 человек, каждый из которых — рыцарь или лжец. Каждый из них произнес фразу: «Среди 17 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, не менее 9 лжецов». Сколько рыцарей может сидеть за этим столом?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** На столе лежат 17 красных и 37 синих бусин. Петя и Вася ходят по очереди. За каждый ход игрок берет со стола две или три бусины. Первым ходит Петя. Побеждает тот игрок, после хода которого со стола исчезнут бусины хотя бы одного из цветов. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш, независимо от игры соперника?

**2.** Для каких натуральных $n$ найдутся натуральные числа $a$ и $b$ такие, что сумма цифр каждого из чисел $a$, $b$, $a+b$ равна $n$?

**3.** Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых десяти из них нашлись две перпендикулярные?

**4.** В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 5 дорог. Страна разделилась на 2 республики по 50 городов в каждой. Докажите, что в первой республике дорог, соединяющих её города, столько же, сколько во второй.

**5.** За круглым столом сидят 180 человек, каждый из которых — рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый из них произнес фразу: «Среди 17 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, не менее 9 лжецов». Сколько рыцарей может сидеть за этим столом?

**6.** Про натуральное число $n$ известно три факта:
1) Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно.
2) Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно.
3) Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.
Чему может быть равно число $n$?

**7.** У паука есть 8 одинаковых носков и 8 одинаковых ботинок. Паук каждую секунду либо надевает на одну из своих ног носок, либо натягивает ботинок на какую-нибудь из ног, на которую носок уже надет (у паука 8 ног; на каждую ногу он надевает один носок и один ботинок). Два способа обувания паука считаются различными, если паук хотя бы в одну из 16 секунд делает различные действия. Сколькими различными способами паук может обуться?

**8.** Дан клетчатый квадрат 9×9. В центре одного из квадратиков сидит квадрогрызка, которая может перебираться по прямой в центр соседнего по стороне квадратика. Добравшись до центра нового квадратика, квадрогрызка поворачивает на 90°. Какую наибольшую длину может иметь замкнутый маршрут квадрогрызки, не проходящий ни через какой квадратик, кроме начального, больше одного раза, и возвращающийся в начальный только один раз?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2011

## ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** На столе лежат 5 красных, 6 синих и 6 белых бусин. Петя и Вася ходят по очереди. За каждый ход игрок берет со стола две или три бусины. Первым ходит Петя. Побеждает тот игрок, после хода которого со стола исчезнут бусины хотя бы одного из цветов. Кто выигрывает при правильной игре?

**2.** Существуют ли такие натуральные числа $a$ и $b$, что сумма цифр каждого из чисел $a$, $b$, $a+b$ равна 999?

**3.** Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых трех из них нашлись две перпендикулярные?

**4.** В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 5 дорог. Страна разделилась на 2 республики по 50 городов в каждой. Докажите, что в первой республике дорог, соединяющих её города, столько же, сколько во второй.

**5.** За круглым столом сидят 180 человек, каждый из которых — рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый из них произнес фразу: «Среди 17 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, не менее 9 лжецов». Сколько рыцарей может сидеть за этим столом?

**6.** Про натуральное число $n$ известно три факта:
1) Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно.
2) Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно.
3) Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.
Чему может быть равно число $n$?

**7.** В бассейн ведут две одинаковых трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась и через нее вода стала поступать вдвое медленнее. Через сколько времени бассейн заполнится?

**8.** Дан клетчатый квадрат 8×8. В центре одного из квадратиков сидит квадрогрызка, которая может перебираться по прямой в центр соседнего по стороне квадратика. Добравшись до центра нового квадратика, квадрогрызка поворачивает на 90°. Может ли квадрогрызка посетить ровно по одному разу все клетки доски?