КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Мотоциклисты Вася и Петя ездят с постоянными скоростями по круговому треку длиной 1км. Вася обнаружил, что Петя каждые 2 минуты его обгоняет. Тогда он вдвое увеличил скорость и теперь уже сам каждые 2 минуты стал обгонять Петю. С какими скоростями ехали мотоциклисты изначально?

2. На острове рыцарей и лжецов два племени. Каждый островитянин произнес фразу: «В моем племени лжецов больше, чем в соседнем». Может ли на острове быть ровно 2011 жителей?

3. В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.

4. Дано 8 трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два и записать их подряд таким образом, что получившееся шестизначное число будет делиться на 7.

5. Можно ли на шахматную доску 8×8 поставить 16 не бьющих друг друга королей так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло по 2 короля?

6. Пусть $e(k)$ — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а $o(k)$ — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что $e(1)+e(2)+\ldots+e(1000)$ меньше, чем $o(1)+o(2)+\ldots+o(1000)$.

7. На окружности отмечено 20 точек и проведен 21 соединяющий их отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать три, составляющие несамопересекающуюся ломаную.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. На острове живут три племени. Каждый житель острова является либо рыцарем (то есть всегда говорит правду), либо лжецом (то есть всегда врет). В один прекрасный день каждый житель острова сказал: «В одном из других племен лжецов меньше, чем в нашем». Может ли на этом острове быть ровно 2011 жителей?

2. В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.

3. Натуральное число n выбрано между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, причем меньший из этих квадратов меньше n ровно на a, а больший — больше n ровно на b. Докажите, что число $n–ab$ — квадрат целого числа.

4. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Известно, что $BC = BD$. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка E, такая, что $CE = CD$. Оказалось, что $DE \perp AB$. Во сколько раз отрезок BD больше отрезка AD?

5. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на доске 7×7 так, чтобы каждый слон бил четное число слонов?

6. На окружности отмечено n точек и проведен n+1 соединяющий их отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать три, составляющие несамопересекающуюся ломаную.

7. Пусть $e(k)$ — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а $o(k)$ — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что $e(1)+e(2)+\ldots+e(n)$ отличается от $o(1)+o(2)+\ldots+o(n)$ меньше, чем на n.

8. Пусть x, y и z такие вещественные числа, что $x \geq 4$, $y \geq 5$, $z \geq 6$ и $x^2+y^2+z^2 \geq 90$. Докажите, что $x+y+z \geq 16$.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2011

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. На острове живут три племени. Каждый житель острова является либо рыцарем (то есть всегда говорит правду), либо лжецом (то есть всегда врет). В один прекрасный день каждый житель острова сказал: «В одном из других племен лжецов меньше, чем в нашем». Может ли на этом острове быть ровно 2011 жителей?

2. 1000 пилюль весом 0,38 г и 5000 пилюль 0,038 г раскладывают по чашкам вместимостью 1 г каждая. Каким наименьшим количеством чашек удастся обойтись?

3. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на доске 4×4 так, чтобы каждый слон бил четное число слонов?

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а стороны AB и DC параллельны. Докажите, что $BC\cdot DA \geq AB\cdot CD$.

5. В теннисном турнире с участием 10 игроков каждые два участника сыграли между собой одну партию. При этом оказалось, что если A выиграл у B, то сумма количества проигрышей игрока A и количества побед игрока B не меньше 8. Докажите, что игроков, одержавших в этом турнире ровно 4 победы, столько же, сколько игроков, одержавших ровно 5 побед. Напомним, что ничьих в теннисе не бывает.

6. Пусть $e(k)$ — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а $o(k)$ — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что $e(1)+e(2)+\ldots+e(n)$ отличается от $o(1)+o(2)+\ldots+o(n)$ меньше, чем на n.

7. Вершины A и E квадрата $ABCD$ и прямоугольника $EBFD$ лежат по одну сторону от общей диагонали BD. Точка G на прямой BE такова, что AG перпендикулярно AE. Докажите, что $BG = ED$.

8. В выпуклом n-угольнике провели $2kn+1$ диагональ. Докажите, что можно выбрать $2k+1$ диагоналей, составляющих несамопересекающуюся ломаную.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ»

Задача 1. *Мотоциклисты Вася и Петя ездят с постоянными скоростями по круговому треку длиной 1км. Вася обнаружил, что Петя каждые 2 минуты его обгоняет. Тогда он вдвое увеличил скорость и теперь уже сам каждые 2 минуты стал обгонять Петю. С какими скоростями ехали мотоциклисты изначально?*

Ответ. 60 км/ч и 90 км/ч. Решение. Петя каждые две минуты проезжал на километр больше Васи, то есть за час — на 30 км больше. После того, как Вася увеличил скорость вдвое, уже он стал проезжать за час на 30 км больше Пети. Значит, изначально скорость Васи составляла 30+30 = 60 км/ч, а скорость Пети — 90 км/ч.

Задача 2. *На острове рыцарей и лжецов два племени. Каждый островитянин произнес фразу: «В моем племени лжецов больше, чем в соседнем». Может ли на острове быть ровно 2011 жителей?*

Ответ. Нет. Решение. Поскольку все островитяне сказали одно и то же, каждое племя состоит либо из одних рыцарей, либо из одних лжецов. Из одних рыцарей оно состоять не может: тогда получилось бы, что в другом племени отрицательное количество лжецов. Значит, оба племени состоят из одних лжецов. Поскольку число 2011 нечетно, в одном из племён больше жителей, чем в другом. Но тогда все лжецы из более многочисленного племени говорят правду, что невозможно.

Задача 3. *В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.*

Решение. Пусть Петя и Вася знакомы с Аней, Борей и Вовой, Петя кроме того знаком с Гришей, а Вася — с Димой. У Гриши и Димы, кроме Пети с Васей есть ещё, самое большее, 3+3 = 6 разных знакомых, а у Ани, Бори и Вовы — тоже 2+2+2 = 6 разных знакомых, всего — не больше 12. Ещё семеро — Петя, Вася, Аня, Боря, Вова, Гриша, Дима, всего — 19. Сюда входят все знакомые Пети и Васи и знакомые их знакомых. Поэтому в кружке из 20 человек найдётся школьник, не входящий в их число, что и требовалось доказать.

Задача 4. *Дано 8 трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два и записать их подряд таким образом, что получившееся шестизначное число будет делиться на 7.*

Решение. Если трехзначные числа a и b записаны подряд, то получившееся шестизначное число равно $1000a+b = 1001a+(b–a)$. Поскольку 1001 делится на 7, $1000a+b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда делится на 7 разность $b–a$. Осталось заметить, что среди любых восьми целых чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на 7.

Задача 5. *Можно ли на шахматную доску 8×8 поставить 16 не бьющих друг друга королей так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло по 2 короля?*

Ответ. Да. Решение. Пример — на рисунке справа.

	К		К				
					К		К
	К		К				
					К		К
К		К					
				К		К	
К		К					
				К		К	

Задача 6. *Пусть e(k) — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а o(k) — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что e(1)+e(2)+…+e(1000) меньше, чем o(1)+o(2)+…+o(1000).*

Решение. Выпишем на доску все делители чисел 1, 2, …, 1000. Поскольку чисел, делящихся на 1, среди чисел от 1 до 1000 не меньше (и даже больше), чем делящихся на 2, единиц выписано больше, чем двоек. По аналогичной причине троек выписано не меньше, чем четверок, пятерок — не меньше, чем шестерок, …, чисел 999 — не меньше, чем чисел 1000, откуда все и следует.

Задача 7. *На окружности отмечено 20 точек и проведен 21 соединяющий их отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать три, составляющие несамопересекающуюся ломаную.*

Решение. Если среди наших точек есть такая, из которой выходит не больше одного отрезка, удалим ее вместе с отрезком и будем так делать до тех пор, пока есть такие точки. Отрезков при этом всегда будет оставаться больше, чем точек. Поскольку трех точек с четырьмя отрезками не бывает, в какой-то момент у нас возникнет ситуация, когда из каждой точки выходит не меньше двух отрезков, и есть точка A, из которой выходит не меньше трех отрезков (иначе отрезков не больше, чем точек). Пусть AB, AC и AD — три выходящих из нее отрезка, причем луч AC лежит внутри угла BAD. Рассмотрим второй отрезок CE, выходящий из точки C. С одной из точек B и D он лежит по разные стороны от прямой AC. Если это B, искомой будет ломаная $BACE$, а если D — ломаная $DACE$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *На острове живут три племени. Каждый житель острова является либо рыцарем (то есть всегда говорит правду), либо лжецом (то есть всегда врет). В один прекрасный день каждый житель острова сказал: «В одном из других племен лжецов меньше, чем в нашем». Может ли на этом острове быть ровно 2011 жителей?*

Ответ: Нет. Решение. Поскольку в каждом племени все островитяне утверждают одно и то же, каждое племя состоит либо из одних рыцарей, либо из одних лжецов. Из одних рыцарей оно состоять не может: тогда получилось бы, что в другом племени отрицательное количество лжецов. Значит, все три племени состоят из одних лжецов. Возьмем самое многочисленное племя М. Поскольку 2011 не делится на 3, найдется племя, в котором людей меньше. Получается, что все люди их племени М говорят правду, что невозможно.

Задача 2. *В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.*

Решение. Пусть Петя и Вася знакомы с Аней, Борей и Вовой, Петя кроме того знаком с Гришей, а Вася — с Димой. У Гриши и Димы, кроме Пети с Васей есть ещё, самое большее, 3+3 = 6 разных знакомых, а у Ани, Бори и Вовы — тоже 2+2+2 = 6 разных знакомых, всего — не больше 12. Ещё семеро — Петя, Вася, Аня, Боря, Вова, Гриша, Дима, всего — 19. Сюда входят все знакомые Пети и Васи и знакомые их знакомых. Поэтому в кружке из 20 человек найдётся школьник, не входящий в их число, что и требовалось доказать.

Задача 3. *Натуральное число n выбрано между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, причем меньший из этих квадратов меньше n ровно на a, а больший — больше n ровно на b. Докажите, что число $n–ab$ — квадрат целого числа.*

Решение. Пусть $k^2 < n < (k+1)^2$. Тогда $a+b = (k+1)^2–k^2 = 2k+1$, и $n–ab = k^2+a–a(2k+1–a) = k^2–2ka+a^2 = (k–a)^2$.

Задача 4. *Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Известно, что $BC = BD$. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка E, такая, что $CE = CD$. Оказалось, что $DE \perp AB$. Во сколько раз отрезок BD больше отрезка AD?*

Ответ: В 2 раза. Решение. Пусть углы при основании DE равнобедренного треугольника DCE равны α. По теореме о внешнем угле треугольника угол BCA равен 2α. Но тогда его биссектриса параллельна прямой DE, и, стало быть, перпендикулярна AB, то есть является в треугольнике ABC биссектрисой и высотой. Следовательно, $AC = BC = BD$, откуда и получаем ответ.

Задача 5. *Какое наибольшее количество слонов можно расставить на доске 7×7 так, чтобы каждый слон бил четное число слонов?*

Ответ. 41. Решение. Будем считать, что угловые клетки доски — черные. *Пример*: слоны стоят на всех белых клетках доски, а также на всех черных, кроме тех, что находятся в двух крайних вертикалях. *Оценка*. Заметим, что если в углу стоит слон, то больше слонов на исходящей из этого угла диагонали нет. Стало быть, если в углах стоят два слона, то на доске не менее 11 пустых клеток (обе диагонали минус две угловые клетки), а если один — то не менее 8 пустых клеток (6 клеток на одной диагонали и два пустых угла на другой). В обоих случаях на доске не более 49–8 = 41 слона. Пусть все углы пусты. Рассмотрим клетку, соседнюю с угловой по диагонали, и три соседних с ней по диагонали не угловых клетки. На всех четырех этих клетках слоны стоять не могут, так как тогда одного из них будут бить три. Поэтому в каждой такой четверке хотя бы одна из клеток пуста, и, поскольку таких четверок четыре, и они не имеют общих клеток, мы заработали еще 4 пустых клетки, кроме угловых, что и завершает доказательство.

Задача 6. *На окружности отмечено n точек и проведен $n+1$ соединяющий их отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать три, составляющие несамопересекающуюся ломаную.*

Решение. Если среди наших точек есть такая, из которой выходит не больше одного отрезка, удалим ее вместе с отрезком и будем так делать до тех пор, пока есть такие точки. Отрезков при этом всегда будет оставаться больше, чем точек. Поскольку трех точек с четырьмя отрезками не бывает, в какой-то момент у нас возникнет ситуация, когда из каждой точки выходит не меньше двух отрезков, и есть точка A, из которой выходит не меньше трех отрезков. Пусть AB, AC и AD — три выходящих из нее отрезка, причем луч AC лежит внутри угла BAD. Рассмотрим второй отрезок CE, выходящий из точки C. С одной из точек B и D он лежит по разные стороны от прямой AC. Если это B, искомой будет ломаная $BACE$, а если D — ломаная $DACE$.

Задача 7. *Пусть e(k) — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а o(k) — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что e(1)+e(2)+…+e(n) отличается от o(1)+o(2)+…+o(n) меньше, чем на n.*

Решение. Выпишем на доску все делители чисел 1, 2, …, n. Пусть выписано s_1 единиц, s_2 двоек, …, s_n чисел n. Очевидно, что $n = s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$. Заметим, что $|(o(1)+o(2)+\ldots+o(n))–(e(1)+e(2)+\ldots+e(n))|$ равняется модулю знакопеременной суммы $s_1–s_2+s_3–\ldots+(–1)^{n+1}s_n$. Эта сумма не больше $s_1 = n$, поскольку группируя s_3 и $–s_2$, s_5 и $–s_4$ и т.д., получаем неположительные слагаемые (а если n четно, то непарное слагаемое $–s_n$ отрицательно). С другой стороны, группируя s_1 и $–s_2$, s_3 и $–s_4$ и т.д., получаем неотрицательные слагаемые (а если n нечетно, то непарное слагаемое s_n положительно), так что указанная сумма не меньше 0, что и завершает доказательство.

Задача 8. *Пусть x, y и z такие вещественные числа, что* $x \geq 4$, $y \geq 5$, $z \geq 6$ *и* $x^2+y^2+z^2 \geq 90$. *Докажите, что* $x+y+z \geq 16$.

Решение. Положим $a = x–4$, $b = y–5$, $c = z–6$. По условию числа a, b и c неотрицательны. Если какое-то из них не меньше 1, то $x+y+z \geq 4+5+6+1 = 16$, и все доказано. Дальше будем считать, что a, b и c меньше 1. Тогда

$$90 \leq x^2+y^2+z^2 = (a+4)^2+(b+5)^2+(c+6)^2 = a^2+b^2+c^2+8a+10b+12c+16+25+36 \leq a+b+c+8a+10b+12c+77.$$

Приведя подобные члены и вычтя 77, получаем, что $13(a+b+c) \geq 9a+11b+13c \geq 13$, откуда $a+b+c \geq 1$, и $x+y+z = 4+5+6+a+b+c \geq 16$.

XXXVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14-20.02.2011

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ

Задача 1. *На острове живут три племени. Каждый житель острова является либо рыцарем (то есть всегда говорит правду), либо лжецом (то есть всегда врет). В один прекрасный день каждый житель острова сказал: «В одном из других племен лжецов меньше, чем в нашем». Может ли на этом острове быть ровно 2011 жителей?*

Ответ: Нет. Решение. Поскольку в каждом племени все островитяне утверждают одно и то же, каждое племя состоит либо из одних рыцарей, либо из одних лжецов. Из одних рыцарей оно состоять не может: тогда получилось бы, что в другом племени отрицательное количество лжецов. Значит, все три племени состоят из одних лжецов. Возьмем самое многочисленное племя М. Поскольку 2011 не делится на 3, найдется племя, в котором людей меньше. Получается, что все люди их племени М говорят правду, что невозможно.

Задача 2. *1000 пилюль весом 0,38 г и 5000 пилюль 0,038 г раскладывают по чашкам вместимостью 1 г каждая. Каким наименьшим количеством чашек удастся обойтись?*

Ответ. 577. Решение. Заменим каждую тяжелую пилюлю десятью легкими. От этого наши возможности раскладывать пилюли по чашкам не ухудшатся. Так как $26\cdot 0{,}038 < 1 < 27\cdot 0{,}038$, в одну чашку мы сможем положить максимум 26 пилюль. Всего пилюль в пересчете на легкие у нас 15000, а $576 < 15000:26 < 577$. Поэтому чашек потребуется не меньше, чем 577. С другой стороны, такого количества чашек хватит, если положить в 500 чашек по две большие и 6 маленьких, в 76 чашек по 26 маленьких пилюль, а в одну — 24 маленькие пилюли.

Задача 3. *Какое наибольшее количество слонов можно расставить на доске 4×4 так, чтобы каждый слон бил четное число слонов?*

	С	С	С
С			С
С			С
	С	С	С

Ответ. 10. Решение. Пример с 10 слонами — на рисунке справа. Чтобы доказать, что больше 10 слонов быть не может, покажем, что на полях одного цвета может стоять не больше 5 слонов. Всего есть 8 полей данного цвета. Если слон стоит на угловой клетке, то больше слонов на исходящей из этого угла диагонали нет, то есть всего слонов на клетках этого цвета не больше 5. Если же в угловых клетках слоны не стоят, а во всех 6 оставшихся клетках — стоят, то есть два слона, которых бьют три других, что противоречит условию.

Задача 4. *В четырехугольнике ABCD диагонали перпендикулярны, а стороны AB и DC параллельны. Докажите, что $BC\cdot DA \ge AB\cdot CD$.*

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Положим $OA = a$, $OB = b$. Треугольник OAB подобен треугольнику OCD по двум углам с некоторым коэффициентом k, поэтому $OC = ka$, $OD = kb$. По теореме Пифагора $AB^2 = a^2+b^2$, $CD^2 = k^2a^2+k^2b^2$, $BC^2 = k^2a^2+b^2$, $AD^2 = a^2+k^2b^2$. Задача свелась к доказательству неравенства $(k^2a^2+b^2)(a^2+k^2b^2) \ge (a^2+b^2)(k^2a^2+k^2b^2)$, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов сводится к очевидному неравенству $(k^2-1)^2a^2b^2 \ge 0$.

Задача 5. *В теннисном турнире с участием 10 игроков каждые два участника сыграли между собой одну партию. При этом оказалось, что если A выиграл у B, то сумма количества проигрышей игрока A и количества побед игрока B не меньше 8. Докажите, что игроков, одержавших в этом турнире ровно 4 победы, столько же, сколько игроков, одержавших ровно 5 побед. Напомним, что ничьих в теннисе не бывает.*

Решение. Сопоставим каждому игроку количество очков, равное числу его побед. Как легко видеть, суммарное количество очков равно количеству игр, то есть 45. Покажем, что *каждый игрок выиграл хотя не более 5 партий*.

Пусть игрок A выиграл у игрока B, и количество набранных ими очков равно a и b соответственно. По условию $9-a+b \ge 8 \Leftrightarrow a - b \le 1$ (*).

Если какой-то игрок выиграл хотя бы 7 партий, то проигравшие ему игроки в силу (*) выиграли хотя бы по 6. Но тогда суммарное количество набранных ими очков не меньше $6\cdot 7+7 = 49$, что больше 45. Если какой-то из игроков A набрал 6 очков, то проигравшие ему набрали хотя бы по 5. Рассмотрим игрока, который выиграл у A. Если он выиграл у всех игроков, у которых выиграл A, то он набрал хотя бы 7 очков, что невозможно. Если он проиграл кому-то из них, то в силу (*) количество набранных им очков не может быть меньше 4. Отсюда получается, что общее количество набранных очков не меньше, чем $6+5\cdot 6+3\cdot 4 = 48$, а это больше 45.

Заметим, что игроки, набравшие 5 очков, найтись должны, кроме того их должно быть не меньше 5: иначе всего игроки набрали меньше 45 очков. Покажем, что не найдется игрока, набравшего меньше 4 очков. Пусть такой игрок нашелся. Тогда в силу (*) он не мог проиграть игроку, набравшему 5 очков. Но выиграть у всех игроков, набравших 5 очков, он тоже не мог, так как их не меньше пяти — противоречие. Получаем, что все игроки одержали либо 4, либо 5 побед. Простой подсчет суммы очков, показывает что таких игроков поровну.

Задача 6. *Пусть $e(k)$ — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а $o(k)$ — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что $e(1)+e(2)+\ldots+e(n)$ отличается от $o(1)+o(2)+\ldots+o(n)$ меньше, чем на n.*

Решение. Выпишем на доску все делители чисел 1, 2, …, n. Пусть выписано s_1 единиц, s_2 двоек, …, s_n чисел n. Очевидно, что $n = s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$. Заметим, что $|(o(1)+o(2)+\ldots+o(n))-(e(1)+e(2)+\ldots+e(n))|$ равняется модулю знакопеременной суммы $s_1-s_2+s_3-\ldots+(-1)^{n+1}s_n$. Эта сумма не больше $s_1 = n$, поскольку группируя s_3 и $-s_2$, s_5 и $-s_4$ и т.д., получаем неположительные слагаемые (а если n четно, то непарное слагаемое $-s_n$ отрицательно). С другой стороны, группируя s_1 и $-s_2$, s_3 и $-s_4$ и т.д., получаем неотрицательные слагаемые (а если n нечетно, то непарное слагаемое s_n положительно), так что указанная сумма не меньше 0, что и завершает доказательство.

Задача 7. *Вершины A и E квадрата $ABCD$ и прямоугольника $EBFD$ лежат по одну сторону от общей диагонали BD. Точка G на прямой BE такова, что AG перпендикулярно AE. Докажите, что $BG = ED$.*

Решение. Все вершины квадрата $ABCD$ и прямоугольника $EBFD$ лежат на окружности радиуса $BD/2$ с центром O в середине отрезка BD. Поскольку вписанный в нее угол FAE опирается на диаметр, он прямой, то есть точка G лежит на пересечении прямых BE и AF: внутри окружности, если точка E лежит на дуге AD, и вне ее в противном случае.

Рассмотрим первый случай. Вписанный угол EBF — прямой, поскольку опирается на диаметр EF. Вписанный угол BFA равен 45 градусам, поскольку опирается на дугу AB, равную 90 градусам. Поэтому прямоугольный треугольник GBF — равнобедренный, и нам достаточно доказать, что $BF = ED$. Но это очевидно, поскольку треугольники OBF и ODE равны по первому признаку.

Во втором случае вписанный угол BEA равен 135 градусам. Поэтому треугольник GAE — прямоугольный равнобедренный, откуда $AE = AG$. Кроме того, $AB = AD$ и каждый из углов GAB и DAE равен 90 градусам плюс половина дуги EB. Поэтому треугольники GAB и EAD равны по первому признаку, откуда $BG = ED$.

Задача 8. *В выпуклом n-угольнике провели $2kn+1$ диагональ. Докажите, что можно выбрать $2k+1$ диагоналей, составляющих несамопересекающуюся ломаную.*

Решение. Индукция по k. При $k = 0$ утверждение задачи очевидно. Пусть верно при $k = m$. Докажем для $k = m+1$. Для каждой вершины удалим две выходящие из нее диагонали, отсекающие наименьшее количество вершин по и против часовой стрелки соответственно (если из вершины выходит меньше двух диагоналей — удалим все). После этого у нас останется не меньше, чем $2(k-1)n+1$ диагоналей, и по предположению индукции найдется $(k-1)$-звенная несамопересекающаяся ломаная из этих диагоналей. Пусть AB — ее первое звено. Возьмем стертую диагональ AC, которая идет в том же направлении, что и AB. Добавляя к найденной ломаной начальное звено CA, получаем искомую k-звенную несамопересекающуюся ломаную.