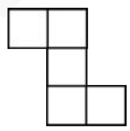
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.2010

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. В классе учится 30 учеников, причем никто из них не родился первого числа. 1 сентября учитель посчитал сумму полных лет всех учеников. Ровно через 5 месяцев, 1 февраля, он снова посчитал сумму полных лет всех учеников и получил число на 10 большее, чем в прошлый раз. Еще ровно через 6 месяцев, 1 августа, он снова посчитал сумму полных лет всех учеников и опять получил число на 10 большее, чем в прошлый раз. Сколько учеников родилось в августе?

2. Каким наименьшим количеством одинаковых картонных клетчатых фигур, изображённых справа, можно полностью покрыть квадрат 6×6 клеток? Фигуры могут пересекаться и вылезать за пределы квадрата.



3. Даны три различных натуральных числа, причем сумма любых двух из этих чисел делится на оставшееся. Докажите, что одно из этих чисел втрое больше другого.

4. 10 команд играют турнир. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?

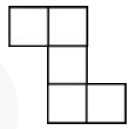
5. На столе лежат три кучки по 17 камней в каждой. Вася и Петя по очереди делают ходы. За один ход можно либо взять камень из какой-либо кучи с наименьшим числом камней, либо уравнять по числу камней какую-либо кучу с не наименьшим числом камней с наименьшей. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.2010

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. В 12-значном числе, делящемся на 9, заменили цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось слово МАГНИТОГОРСК. Чему может быть равно Г+О?

2. Можно ли клетчатый квадрат размером 6×6 полностью покрыть восемью одинаковыми картонными клетчатыми фигурами такими, как изображённая справа? Фигуры могут вылезать за пределы квадрата, но не могут пересекаться.



3. На гранях куба расставлены различные натуральные числа, не превышающие n, причём числа на гранях, имеющих общее ребро, отличаются не менее, чем на 1004. При каком наименьшем n это возможно?

4. 10 команд играют турнир. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?

5. На столе лежат 17 кучек по 17 камней в каждой. Вася и Петя по очереди делают ходы. За один ход можно либо взять камень из какой-либо кучи с наименьшим числом камней, либо уравнять по числу камней какую-либо кучу с не наименьшим числом камней с наименьшей. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.2010

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В 12-значном числе, делящемся на 9, заменили цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось слово МАГНИТОГОРСК. Чему может быть равно Г+О?

2. Про три вещественных числа известно, что сумма любых двух из них отрицательна, а произведение любых двух больше 1. Докажите, что сумма всех трех меньше, чем -3.

3. Плоскость разбита на одинаковые правильные треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами. В одном из этих треугольников лежит фишка. Разрешается перекладывать фишку из треугольника, в котором она находится, в треугольник, имеющий с этим общую вершину и симметричный ему относительно этой вершины. Можно ли такими операциями переместить фишку в треугольник, имеющий с исходным общую сторону?

4. На стороне угла с вершиной P выбраны точки A и B. Проведённые через них перпендикуляры a и b к этой стороне пересекают другую сторону угла в точках Q и R соответственно. Прямая, проходящая через A перпендикулярно BQ, пересекает b в точке T. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AR, пересекает a в точке S. Докажите, что точки P, T и S лежат на одной прямой.

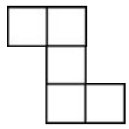
5. На доске написано число 8. Если на доске написана сумма двух чисел a и b, то можно выписать на доску число ab. Докажите, что не более, чем за $3\cdot 10^{2010}$ выписываний можно добиться, чтобы на доске оказались все натуральные числа от 1 до 10^{2010}.

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *В классе учится 30 учеников, причем никто из них не родился первого числа. 1 сентября учитель посчитал сумму полных лет всех учеников. Ровно через 5 месяцев, 1 февраля, он снова посчитал сумму полных лет всех учеников и получил число на 10 большее, чем в прошлый раз. Еще ровно через 6 месяцев, 1 августа, он снова посчитал сумму полных лет всех учеников и опять получил число на 10 большее, чем в прошлый раз. Сколько учеников родилось в августе?*

Ответ: 10. Решение. Сумма, подсчитанная 1 февраля, увеличилась на число учеников, у которых между 1 сентября и 1 февраля число полных лет увеличилось на 1, то есть тех, чей день рождения находится в этом промежутке. Стало быть, между 1 сентября и 1 февраля родились 10 учеников. Ещё 10 учеников родились между 1 февраля и 1 августа. Все остальные родились в августе. Их 30–10–10 = 10.

Задача 2. *Каким наименьшим количеством одинаковых картонных клетчатых фигур, изображённых справа, можно полностью покрыть квадрат 6×6 клеток? Фигуры могут пересекаться и вылезать за пределы квадрата.*



Ответ: Восемью. Решение. Семи фигур не хватит, поскольку $7\times5 < 6\times6$. Пример для 8 фигур легко строится: двумя такими фигурками легко покрыть квадрат 3×3, а квадрат 6×6 состоит из четырёх квадратов 3×3.

Задача 3. *Даны три различных натуральных числа, причем сумма любых двух из этих чисел делится на оставшееся. Докажите, что одно из этих чисел втрое больше другого.*

Решение. Пусть $a < b < c$ — данные числа. Тогда $a + b < 2c$, откуда $a + b = c$. Далее, $a+c = 2a+b$, что меньше $3b$ и больше b. Поэтому $a+c = 2a+b = 2b$, откуда $b = 2a$ и $c = a + b = 3a$.

Задача 4. *10 команд играют турнир. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?*

Ответ: Нет. Решение. Каждая команда могла сыграть не менее одного и не более 10 матчей: с каждой из остальных девяти плюс ещё один повторный. Получается 10 возможностей (1, 2, …, 10 матчей) на 10 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли (1+2+…+10)/2 = 27,5 матчей, что невозможно.

Задача 5. *На столе лежат три кучки по 17 камней в каждой. Вася и Петя по очереди делают ходы. За один ход можно либо взять камень из какой-либо кучи с наименьшим числом камней, либо уравнять по числу камней какую-либо кучу с не наименьшим числом камней с наименьшей. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?*

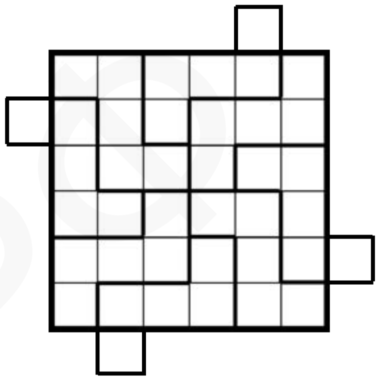
Ответ: Вася. Решение. Сначала Вася всё время должен ходить так, чтобы после его хода в наименьшей куче было чётное число камней, а две другие кучи были одинаковыми. После первого его хода это случится само собой, а затем если Петя берёт камень из наименьшей кучи, Вася должен сделать то же самое (это возможно, поскольку второй оставил в наименьшей куче нечётное число камней), а если Петя уравнял одну из куч с наименьшей, Вася должен уравнять с наименьшей оставшуюся кучу. Когда после хода Васи одна из куч исчезнет, в двух оставшихся кучах будет поровну камней, и оставшиеся ходы Вася должен делать симметрично Петиным: если Петя взял камень из одной кучки, Вася берёт камень из другой. Очевидно, что при такой игре последний камень достанется Васе.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *В 12-значном числе, делящемся на 9, заменили цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось слово МАГНИТОГОРСК. Чему может быть равно Г+О?*

Ответ: 9. Решение. В слове МАГНИТОГОРСК 10 различных букв. Значит, в исходном числе были все цифры от 0 до 9, причём цифры, зашифрованные буквами Г и О, повторяются дважды. Сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45. Поэтому сумма всех цифр исходного числа равна 45+Г+О. По известному признаку делимости она должна делиться на 9. Поскольку $0+1 \le$ Г+О $\le 8+9$, а между числами 1 и 17 только число 9 делится на 9, Г+О = 9.

Задача 2. *Можно ли клетчатый квадрат размером 6×6 полностью покрыть восемью одинаковыми картонными клетчатыми фигурами такими, как изображённая справа? Фигуры могут вылезать за пределы квадрата, но не могут пересекаться.*



Ответ: Да. Решение. См. рисунок справа.

Задача 3. *На гранях куба расставлены различные натуральные числа, не превышающие n, причём числа на гранях, имеющих общее ребро, отличаются не менее, чем на 1004. При каком наименьшем n это возможно?*

Ответ: 2012. Решение. Не умаляя общности можно считать, что наименьшее из расставленных чисел равно 1 (иначе вычтем из всех расставленных чисел по k–1, где k — наименьшее из расставленных). Число на противоположной ему грани — хотя бы двойка. Поэтому наименьшее из чисел, граничащих с 1 — хотя бы 2+1004 = 1006. Напротив него по крайней мере 1007, поэтому каждое из двух граничащих с ним и с 1 чисел не меньше, чем 1007+1004 = 2011, а наибольшее из двух этих чисел не меньше 2012. Пример на 2012: на противоположных гранях стоят 1 и 2, 1006 и 1007, 2011 и 2012.

Задача 4. *10 команд играют турнир. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?*

Ответ: Нет. Решение. Допустим, есть команда, не сыгравшая ни одного матча. Тогда каждая из оставшихся команд сыграла не больше 9 матчей: с каждой из остальных восьми плюс один повторный. Получается 9 возможностей (1, 2, …, 9 матчей) на 19 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли (1+2+…+9)/2 = 22,5 матчей, что невозможно.

Теперь допустим, что каждая команда сыграла хотя бы один матч. Тогда для числа сыгранных матчей получается 10 возможностей (1, 2, …, 10 матчей) на 10 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли (1+2+…+10)/2 = 27,5 матчей, что также невозможно.

Задача 5. *На столе лежат 17 кучек по 17 камней в каждой. Вася и Петя по очереди делают ходы. За один ход можно либо взять камень из какой-либо кучи с наименьшим числом камней, либо уравнять по числу камней какую-либо кучу с не наименьшим числом камней с наименьшей. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?*

Ответ: Вася. Решение. Сначала Вася всё время должен ходить так, чтобы после его хода наименьших куч было нечётное число, и в каждой из них было чётное число камней, а оставшиеся кучи разбивались на пары с равным числом камней. После первого его хода это случится само собой, а затем если Петя берёт камень из наименьшей кучи, Вася должен сделать то же самое (это возможно, поскольку второй оставил в наименьшей куче нечётное число камней), а если Петя уравнял одну из куч с наименьшей, Вася должен уравнять с наименьшей парную кучу. Когда после хода Васи одна из куч исчезнет, оставшиеся кучи будет разбиты на пары куч с равным числом камней, и оставшиеся ходы Вася должен делать симметрично Петиным: если Петя взял один или несколько каменей из какой-то кучки, Вася берёт столько же камней из другой. Очевидно, что при такой игре последний камень достанется Васе.

ЯГУБОВ.РФ

XXXVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. МАГНИТОГОРСК, 1-7.11.2010

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *В 12-значном числе, делящемся на 9, заменили цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось слово МАГНИТОГОРСК. Чему может быть равно Г+О?*

Ответ: 9. Решение. В слове МАГНИТОГОРСК 10 различных букв. Значит, в исходном числе были все цифры от 0 до 9, причём цифры, замененные буквами Г и О, повторяются дважды. Сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45. Поэтому сумма всех цифр исходного числа равна 45+Г+О. По известному признаку делимости она должна делиться на 9. Поскольку $0+1 \le$ Г+О $\le 8+9$, а между числами 1 и 17 только число 9 делится на 9, Г+О = 9.

Задача 2. *Про три вещественных числа известно, что сумма любых двух из них отрицательна, а произведение любых двух больше 1. Докажите, что сумма всех трех меньше, чем –3.*

Решение. Если произведение двух чисел положительно, а сумма отрицательна, то оба числа отрицательны. Следовательно, все три данных числа отрицательны. Если произведение двух чисел больше 1, то хотя бы одно из них по модулю больше 1. Поэтому одно из данных чисел меньше –1. Обозначим его через x, а два других — через y и z. Заметим, что $|y|+|z| \ge 2\sqrt{yz} > 2$, откуда $y+z < -2$ и $x+y+z < -3$. Замечание. Неравенство $|y|+|z| > 2$ можно доказать и по-другому: взять то из чисел y и z, которое меньше –1 (пусть это y), уменьшить модуль второго до $1/|y|$ и воспользоваться неравенством $|y|+|z| > |y|+1/|y| \ge 2$.

Задача 3. *Плоскость разбита на одинаковые правильные треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами. В одном из этих треугольников лежит фишка. Разрешается перекладывать фишку из треугольника, в котором она находится, в треугольник, имеющий с этим общую вершину и симметричный ему относительно этой вершины. Можно ли такими операциями переместить фишку в треугольник, имеющий с исходным общую сторону?*

Ответ: Нет. Решение. Выберем соседний треугольник, в который мы хотим попасть, и разобьём плоскость на составленные из наших треугольников параллельные полосы шириной в высоту одного треугольника так, чтобы треугольник с фишкой и выбранный нами соседний оказались в одной полосе. Раскрасим их в чёрный и белый цвета так, чтобы соседние полосы были разных цветов, а треугольник с фишкой был белым. Будем считать, что плоскость расположена вертикально, а границы полос горизонтальны. Назовём треугольник *верхним* (*нижним*), если он «смотрит» вершиной вверх (вниз). Легко проверить, что те треугольники, в которые из данного треугольника можно переложить фишку за один ход, во-первых, другого цвета, а, во-вторых, все верхние, если данный — нижний, и наоборот. Поэтому если исходный треугольник — белый верхний, то из него можно попасть только в белые верхние и чёрные нижние, а выбранный нами соседний с ним — белый нижний.

Задача 4. *На стороне угла с вершиной P выбраны точки A и B. Проведённые через них перпендикуляры a и b к этой стороне пересекают другую сторону угла в точках Q и R соответственно. Прямая, проходящая через A перпендикулярно BQ, пересекает b в точке T. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AR, пересекает a в точке S. Докажите, что точки P, T и S лежат на одной прямой.*

Решение. Заметим, что $\angle TAB = 90°-\angle QBA = \angle BQA$. Поэтому прямоугольные треугольники ATB и QBA подобны, откуда $BT/AB = AB/QA$. Аналогично из подобия треугольников SAB и ABR получаем, что $AS/AB = AB/RB$. Треугольники PBR и PAQ тоже подобны, откуда $PB/BR = PA/AQ$. Из всех этих равенств получаем: $BT/AS = (AB^2/QA)/(AB^2/RB) = BR/QA = PB/PA$, откуда треугольники SAP и TBA подобны и, следовательно, точки P, T и S лежат на одной прямой.

Задача 5. *На доске написано число 8. Если на доске написана сумма двух чисел a и b, то можно выписать на доску число ab. Докажите, что за $3\cdot 10^{2010}$ выписываний можно выписать все числа от 1 до 10^{2010}.*

Решение. Заметим, что если на доске написано число n, то мы можем написать и число $2(n-2) = 2n-4$. Если $n > 4$, то $2n-4 = n+(n-4) > n$. Поэтому, начав с числа 8 и повторяя операцию $n \to 2n-4$, мы менее, чем за 10^{2010} шагов выпишем число, большее, чем 10^{2010}. Первое такое число (обозначим его k) будет меньше, чем $2\cdot 10^{2010}$, потому что оно равно $2n-4$, где $n < 10^{2010}$. Заметим теперь, что если у нас выписано число n, то мы можем выписать и число $1\cdot(n-1) = n-1$. Поэтому, отправляясь от числа k, мы сумеем за

k–1 < $2\cdot 10^{2010}$ шагов выписать все натуральные числа, меньшие k, в том числе все числа от от 1 до 10^{2010}. Мы потратили на это меньше, чем $10^{2010}+2\cdot 10^{2010} = 3\cdot 10^{2010}$ шагов.

ЯГубов.РФ