XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. S — количество 33-элементных подмножеств множества $\mathbf{H} = \{1, 2, ..., 2009\}$ с четной суммой элементов, а N — количество подмножеств с нечетной суммой. Какое из чисел S и N больше?

2. На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.

3. На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?

4. Натуральные числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.

5. Даны 100 попарно различных чисел. Докажите, что среди всех их средних арифметических по два, три, четыре, ..., сто найдутся не менее 2597 различных.

6. В связном графе G с n вершинами есть цикл. Докажите, что существует не более, чем $9\cdot 2^{n-3}$ правильных раскрасок вершин графа G в 3 цвета. (Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. При раскраске вершин в 3 цвета не обязательно использовать все цвета.)

7. Докажите, что $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ при всех положительных a, b и c.

8. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что треугольник ABM — равносторонний. Докажите, что на прямой AB есть точка N, для которой треугольник CDN — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. S — количество 33-элементных подмножеств множества $\mathbf{H} = \{1, 2, ..., 2008\}$ с четной суммой элементов, а N — количество подмножеств с нечетной суммой. Какое из чисел S и N больше?

2. На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.

3. На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?

4. Простые числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.

5. На доске написаны натуральные числа $a_0 = 1 < a_1 < \ldots < a_{10000}$, причём каждое из чисел, кроме a_0, не больше своего удвоенного номера (то есть $a_1 \le 2$, $a_2 \le 4$, $\ldots$, $a_{10000} \le 20000$). Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел равна 2008.

6. В стране 2008 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками). Министерство региональной политики рассматривает все возможные проекты разбиения страны на 3 республики так, что никакие два города из одной республики не соединены авиалинией. Докажите, что количество таких проектов не превосходит $3\cdot2^{2007}$.

7. Докажите, что $(a+b)(a+c) \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ при всех положительных a, b и c.

8. Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 5 цифр и получить $2a^3$.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

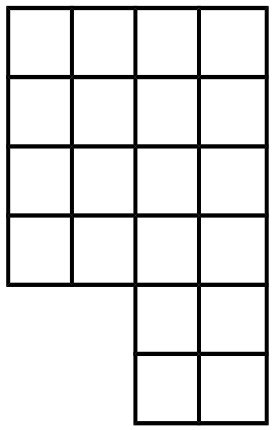
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Решите в вещественных числах систему уравнений $[x]-y = 2[y]-z = 3[z]-x = 2008/2009$. Здесь $[a]$ — *целая часть* числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a (например, $[1{,}5] = 1$, $[2] = 2$, $[-1{,}5] = -2$).

2. На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.

3. На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?



4. Простые числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.

5. Вася отрезал от показанной на рис. фигуры три одинаковых треугольника, переложил их и получил в результате прямоугольник, стороны которого относятся как 1:2. Покажите, как он это сделал.

6. На доске написаны натуральные числа $a_0 = 1 < a_1 < \ldots < a_{10000}$, причём каждое из чисел, кроме a_0, не больше своего удвоенного номера (то есть $a_1 \le 2$, $a_2 \le 4$, …, $a_{10000} \le 20000$). Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел равна 2008.

7. У Саши есть 255 одинаковых по виду монет, ровно одна из которых фальшивая (легче настоящих). У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание, в результате которого весы остались в равновесии, он берет с Саши плату один рубль (взвешивания, в которых одна из чашек перевешивает, Костя разрешает делать бесплатно). Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов?

8. Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 5 цифр и получить $2a^3$.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.12.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?

2. На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.

3. Рассмотрим множество A натуральных чисел, наименьший элемент которого равен 1001, а произведение всех его элементов — квадрат натурального числа. Какое наименьшее значение может принимать максимальный элемент множества A?

4. Простые числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.

5. На доске написаны натуральные числа $a_0 = 1 < a_1 < \ldots < a_{10000}$, причём каждое из чисел, кроме a_0, не больше своего удвоенного номера (то есть $a_1 \le 2$, $a_2 \le 4$, …, $a_{10000} \le 20000$). Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел равна 2008.

6. Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 5 цифр и получить $2a^3$.

7. Даны 100 попарно различных положительных чисел. Докажите, что среди всех их средних арифметических по два, три, четыре, ..., сто найдутся не менее 2597 различных.

8. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками). Министерство региональной политики рассматривает все возможные проекты разбиения страны на 3 республики так, что никакие два города из одной республики не соединены авиалинией. Докажите, что количество таких проектов не превосходит $3 \cdot 2^{99}$.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.12.2008

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее число королей при этом может стоять у края доски?

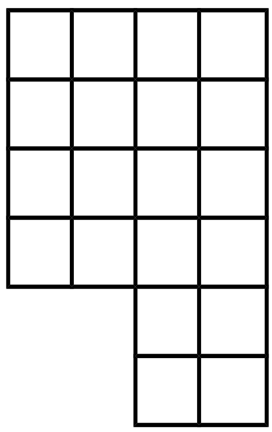
2. На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.

3. Рассмотрим множество A натуральных чисел, наименьший элемент которого равен 33, а произведение всех его элементов — точный квадрат. Какое наименьшее значение может принимать наибольший элемент множества A?

4. Решите в вещественных числах систему уравнений $[x]-y = 2[y]-z = 3[z]-x = 2008/2009$. Здесь $[a]$ — *целая часть* числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a (например, $[1{,}5] = 1$, $[2] = 2$, $[-1{,}5] = -2$).

5. У Саши есть 255 одинаковых по виду монет, ровно одна из которых фальшивая (легче настоящих). У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание, в результате которого весы остались в равновесии, он берет с Саши плату один рубль (взвешивания, в которых одна из чашек перевешивает, Костя разрешает делать бесплатно). Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов?

6. Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 3 цифры и получить a^3.



7. Вася отрезал от показанной на рисунке фигуры три одинаковых треугольника, переложил их и получил в результате прямоугольник, стороны которого относятся как 1:2. Покажите, как он это сделал.

8. Новости в городе Сплетнинске распространяются так: каждый житель, узнавший какую-то новость, на следующее утро делится ею с двумя горожанами, ранее ее не знавшими. В декабре семь жителей Сплетнинска независимо друг от друга узнали важную новость, и в результате к 20-му декабря эта новость стала известна 120 жителям. В какой день узнал новость первый из горожан?

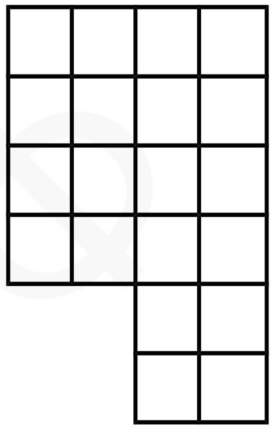
XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.12.2008

ЛИГА «СТАРТ»

1. На шахматной доске 8×8 стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее число королей при этом может стоять у края доски?

2. Вася отрезал от показанной на рис. фигуры три одинаковых треугольника, переложил их и получил в результате прямоугольник, стороны которого относятся как 1:2. Покажите, как он это сделал.



3. Катя загадала несколько различных натуральных чисел,, самое маленькое из которых было равно 10. Оказалось, что произведение всех Катиных чисел – точный квадрат. Могли ли все они быть меньше 20?

4. Треть пути от Перми до Екатеринбурга – подъем в гору, треть – по ровной местности, и треть – спуск под гору. Турист прошел весь путь со средней скоростью 6 км/ч, при этом на первой трети его скорость была равна 4 км/ч, а на второй – 6 км/ч. Найдите скорость туриста на последнем участке пути.

5. У Саши есть 60 одинаковых по виду гирек, одна из которых фальшивая (легче настоящих). У Кости есть весы, но за каждое взвешивание, в результате которого одна из чаш весов перевесила, он берет с Саши плату один рубль (а взвешивания, в которых весы остались в равновесии, Костя разрешает делать бесплатно). Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую гирьку с помощью Костиных весов?

6. Можно ли раскрасить доску 2008×2008 в три цвета так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали или большой диагонали никаких двух цветов не было поровну?

7. Ручка дороже трех карандашей на целое число рублей, а карандаш стоит дешевле 1 рубля. Комплект из ручки и 12 карандашей стоит ровно 5 рублей. Сколько стоит ручка?

8. Новости в городе Сплетнинске распространяются так: каждый житель, узнавший какую-то новость, на следующее утро делится ею с двумя горожанами, ранее ее не знавшими. В декабре семь жителей Сплетнинска независимо друг от друга узнали важную новость, и в результате к 20-му декабря эта новость стала известна 120 жителям. В какой день узнал новость первый из горожан?