МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?

2. Параллельные прямые разбивают плоскость на одинаковые полосы ширины 1. Каждая полоса целиком покрашена в красный или синий цвет (точки на прямых, разделяющих полосы, не покрашены). Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 100, все вершины которого покрашены в один цвет.

3. Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбраны 660 чисел. Докажите, что из этих 660 чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).

4. В левом нижнем углу доски $2\times n$ лежит 2^{n+1} конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что вне зависимости от порядка действий Василия рано или поздно хотя бы одна конфета окажется в правом верхнем углу.

5. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.

6. Докажите, что $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ при всех натуральных n.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, $\angle C = 90°+\angle B/2$, $\angle AMC = 45°$. Найдите углы треугольника ABC.

8. Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1}- n^2$ при натуральных $m > 1$ и n?

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?

2. Параллельные прямые разбивают плоскость на одинаковые полосы ширины 1. Каждая полоса целиком покрашена в красный или синий цвет (точки на прямых, разделяющих полосы, не покрашены). Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 100, все вершины которого покрашены в один цвет.

3. Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрано 800 чисел. Докажите, что из этих 800 чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).

4. В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с 7 учениками в каждом из остальных девяти классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Докажите, что во всех классах поровну учеников.

5. В некоторых клетках доски $2\times n$ лежат монеты, всего монет 2^n. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.

6. Докажите, что $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \ge (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ при всех натуральных n.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC и $\angle C = 90°+\angle B/2$. Докажите, что $\angle AMC < 60°$.

8. Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1} - n^2$ при натуральных $m > 1$ и n?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.12.2008

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?

2. На столе лежат кучки спичек. Выбирается произвольная кучка, и из всех кучек, не меньших выбранной (включая саму выбранную), удаляется по столько спичек, сколько было в выбранной кучке. После нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько в ней может быть спичек, если сначала кучки содержат 1, 2, 3, …, 20 спичек?

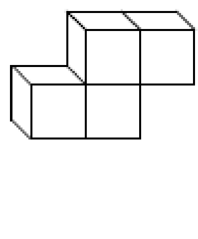
3. Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрано 1010 чисел. Докажите, что из этих 1010 чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).

4. В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с одним учеником в каждом из остальных девяти классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Докажите, что во всех классах поровну учеников.

5. В некоторых клетках доски $2\times n$ лежат монеты, всего монет 2^n. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.

6. Докажите, что $n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$ при всех натуральных n.

7. Можно ли разрезать куб $4\times4\times4$ на блоки из 4 кубиков, изображённые на картинке справа?



8. Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1}- n^2$ при натуральных m и n?

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.12.2008

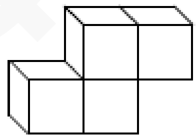
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, $\angle C = 90°+\angle B/2$, $\angle AMC = 45°$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1}-n^2$ при натуральных m и n?

3. Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрана тысяча чисел. Докажите, что из этой тысячи чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).

4. Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённые на картинке справа?



5. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.

6. Дано натуральное число $n > 1$. Докажите неравенство

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

7. В некоторых клетках доски $2\times n$ лежат монеты, всего монет 2^n. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.

8. В Простоквашинской школе 10 классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Каждый ученик знаком ровно с тремя учениками в каждом из остальных девяти классов. Докажите, что во всех классах поровну учеников.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.12.2008

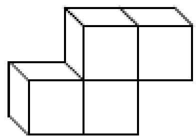
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?

2. На столе лежат кучки спичек. Выбирается произвольная кучка, и из всех кучек, не меньших выбранной (включая саму выбранную), удаляется по столько спичек, сколько было в выбранной кучке. После нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько в ней может быть спичек, если сначала кучки содержат 1, 2, 3, …, 54 спички?

3. Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрана тысяча чисел. Докажите, что из этой тысяча чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).

4. Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённые на картинке справа?



5. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 32 равных квадрата.

6. Дано натуральное число $n > 1$. Докажите неравенство $n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$.

7. В некоторых клетках доски 2×3 лежат монеты, всего монет 8. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.

8. В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с одним учеником в каждом из остальных девяти классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Докажите, что во всех классах поровну учеников.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.12.2008

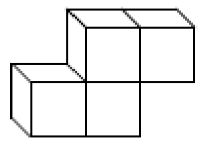
ЛИГА «СТАРТ»

1. На столе лежат 20 кучек спичек по 1, 2, 3, …, 20 спичек. Выбирается произвольная кучка, и из всех кучек, не меньших выбранной (включая саму выбранную), удаляется по столько спичек, сколько было в выбранной. После нескольких таких операций на столе осталась всего одна кучка. Сколько в ней может быть спичек?

2. Ваня учился работать с отрицательными числами. Он записал в тетради числа 1, –1, –1, 1, –1, а затем начал писать дальше по следующему правилу: шестое число равно произведению первого и второго, 7-мое – произведению 2-го и 3-го, восьмое – произведению 3-го и 4-го и так далее. Когда он достиг 2008-го числа, мама позвала его спать. Найдите сумму всех написанных Ваней чисел.

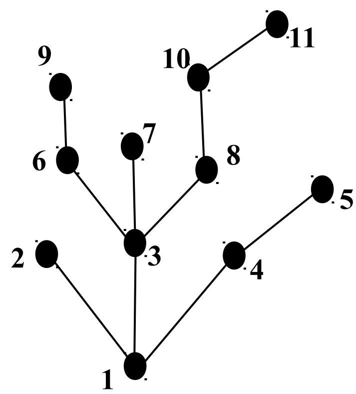
3. В разложение натурального числа, меньшего 1200, на простые множители входит ровно 9 сомножителей, причём среди сомножителей есть хотя бы два различных. Докажите, что это число делится на 24.

4. Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённых на картинке справа?



5. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Верно ли, что одна из сторон прямоугольника ровно в 2 раза больше другой?

6. В языке племени Мумба-Румба нет фамилий, а вместо фамилии используется имя отца. Исследователь Африки Ливингстон записал имена 12 мужчин, являющихся кровными родственниками. Вот эти имена в алфавитном порядке: Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун, Ос Тун, Па Ак, Па Тун, Ран Тун, Тун Ак, Тун Ос, Тун Па. Кроме того, он нарисовал их генеалогическое древо, но забыл, кто кому приходится отцом, дедом и так далее. Помогите ему восстановить информацию (найдите все варианты и докажите, что других нет). (Номера на рисунке не соответствуют списку)



7. Жители острова рыцарей (которые всегда говорят правду) и лжецов (которые всегда лгут) встали в хоровод, при этом некоторые из них знакомы, а некоторые – нет. Каждый сказал своему левому соседу: «Я знаю, кто ты и знаю, что ты лжец». Докажите, что лжецов в круге не меньше половины.

8. Можно ли найти 10 последовательных натуральных чисел и поставить их вместо звёздочек в выражения *–* = 2, *–* = 3, *–* = 4, *–* = 5, *–* = 6 так, чтобы получились пять верных равенств? Каждое из 10 чисел должно быть использовано ровно один раз.