XXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2007

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что если отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис и медиан, параллелен одной из сторон треугольника, то эта сторона равна полусумме двух других.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Оказалось, что $BO > AO$, а $\angle ABC > \angle BAD$. Докажите, что $AC+BC > AD+BD$.

3. Даны натуральные числа a, b, k такие, что $30a+40b$, $30b+40a$ — катеты, а $50a+kb$ — гипотенуза прямоугольного треугольника. Найдите минимальное значение $a+b+k$.

4. По кругу расставлены двадцать фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки в начале не стояли рядом, выигрывает первый игрок (который начинает игру); в противном случае выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Магический квадрат порядка k — это квадратная таблица $k\times k$, заполненная числами так, что суммы чисел во всех строках, во всех столбцах и на двух главных диагоналях равны. Докажите, что в магическом квадрате порядка $2n$, заполненном всеми числами от 1 до $4n^2$, нельзя найти магический квадрат порядка n, заполненный числами от 1 до n^2.

6. Докажите, что произведение 10 последовательных натуральных чисел не может быть точным квадратом.

7. В графстве Липшир у каждого джентльмена не более n знакомых ($n > 3$), но у каждых двух незнакомых между собой джентльменов есть общий знакомый. Известно также, что в клубе "Клика" состоят n джентльменов, каждый из которых знаком со всеми остальными членами клуба. Какое наибольшее количество джентльменов может быть в графстве?

8. Обозначим через $a_{n,k}$ количество способов распределить k конфет среди n детей таким образом, чтобы каждому ребенку досталось не более двух конфет (возможно, ни одной). Вычислите сумму

$$a_{2007,1} + a_{2007,4} + a_{2007,7} + \ldots + a_{2007,4012}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что если отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис и медиан, параллелен одной из сторон треугольника, то эта сторона равна полусумме двух других.

2. На биссектрисе BL треугольника ABC нашлась такая точка K, что $CL = AK$. Кроме того, $AB = BL$. Докажите, что $\angle LAK = \angle ABC$.

3. Даны натуральные числа a, b, k такие, что $30a+40b$, $30b+40a$ — катеты, а $50a+kb$ — гипотенуза прямоугольного треугольника. Найдите минимальное значение $a+b+k$.

4. По кругу расставлены двадцать фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки в начале не стояли рядом, выигрывает первый игрок (который начинает игру); в противном случае выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Магический квадрат порядка k — это квадратная таблица $k\times k$, заполненная числами так, что суммы чисел во всех строках, во всех столбцах и на двух главных диагоналях равны. Докажите, что в магическом квадрате порядка $n+2$ ($n > 1$), заполненном всеми числами от 1 до $(n+2)^2$, нельзя найти магический квадрат порядка n, заполненный числами от 1 до n^2.

6. Докажите, что произведение пяти последовательных нечетных натуральных чисел не может быть точным квадратом.

7. В избирательном округе Роттен-Боро у каждого джентльмена не более 3 знакомых, но у каждых двух незнакомых между собой джентльменов есть общий знакомый. Известно также, что 3 джентльмена, представляющие в округе партию "Друзья короля", попарно знакомы друг с другом. Какое наибольшее количество джентльменов может быть в округе?

8. Найдите количество способов раздать 2007 детям конфеты так, чтобы каждому ребенку досталось не более двух конфет (возможно, ни одной), и общее количество конфет делилось на 3.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вова хочет вырезать из квадрата $2n\times 2n$ по линиям, параллельным сторонам квадрата, несколько прямоугольников $1\times(n+1)$ (эти прямоугольники могут располагаться как вертикально, так и горизонтально). Для каждого натурального n укажите, какое наибольшее количество таких прямоугольников у него может получиться.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Оказалось, что $BO > AO$, а $\angle ABC > \angle BAD$. Докажите, что $S_{ABC} > S_{ABD}$.

3. Даны натуральные числа a, b, k такие, что $30a+40b$, $30b+40a$ — катеты, а $50a+kb$ — гипотенуза прямоугольного треугольника. Докажите, что $a+b+k \geq 248$.

4. По кругу расставлены пятьдесят фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки в начале не стояли рядом, выигрывает первый игрок (который начинает игру); в противном случае выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Магический квадрат — это квадратная таблица, заполненная числами так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Имеется магический квадрат $n\times n$, заполненный числами от 1 до n^2. Докажите, что к нему нельзя добавить две строки и два столбца и заполнить их числами от n^2+1 до $(n+2)^2$ так, чтобы получился магический квадрат $(n+2)\times(n+2)$.

6. Докажите, что произведение шести последовательных нечетных натуральных чисел не может быть точным квадратом.

7. В компании из k человек каждый имеет ровно трех знакомых, любые двое незнакомых имеют общего знакомого и есть трое попарно знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.

8. Найдите количество способов раздать каждому из 2007 детей по одной, две или три конфеты так, чтобы общее количество конфет делилось на три.

XXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2007

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вова хочет вырезать из квадрата $2n\times2n$ по линиям, параллельным сторонам квадрата, несколько прямоугольников $1\times(n+1)$ (эти прямоугольники могут располагаться как вертикально, так и горизонтально). Для каждого натурального n укажите, сколько таких прямоугольников у него может получиться.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Оказалось, что $BO > AO$, а $\angle ABC > \angle BAD$. Докажите, что площадь треугольника ABC больше площади треугольника ABD.

3. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2–b^2 = bc$ и $b^2–c^2 = ca$. Докажите, что $a^2 – c^2 = ab$.

4. По кругу расставлены двадцать фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки в начале стояли рядом, выигрывает второй игрок; в противном случае выигрывает первый (который начинает игру). Кто выиграет при правильной игре?

5. Магический квадрат — это квадратная таблица, заполненная числами так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Имеется магический квадрат 4×4, заполненный числами от 1 до 16. Докажите, что если в любое место пустой таблицы 8×8 вставить этот магический квадрат, то нельзя будет заполнить пустые клетки числами от 17 до 64 так, чтобы образовался магический квадрат 8×8.

6. Докажите, что произведение пяти последовательных нечетных натуральных чисел не может быть точным квадратом.

7. В кружке у каждого школьника ровно три друга, а у любых двух, не являющихся друзьями, есть общий друг. Известно, что Петя, Вася и Коля дружат друг с другом, а также Маша, Глаша и Даша дружат друг с другом. Какое наибольшее количество школьников может быть в этом кружке?

8. Найдите количество способов так распределить по одной, две или три конфеты среди 2007 участников Уральского турнира, чтобы общее количество конфет делилось на 3.

XXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2007

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Вова хочет вырезать из квадрата 6×6 по линиям, параллельным сторонам квадрата, несколько прямоугольников 1×4 (эти прямоугольники могут располагаться как вертикально, так и горизонтально). Сколько таких прямоугольников у него может получиться?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Оказалось, что $BO > AO$, а $\angle ABC > \angle BAD$. Докажите, что площадь треугольника ABC больше площади треугольника ABD.

3. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2-b^2 = bc$ и $b^2-c^2 = ab$. Докажите, что $abc = 0$.

4. По кругу расставлены двадцать фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки в начале стояли рядом, выигрывает второй игрок; в противном случае выигрывает первый (который начинает игру). Кто выиграет при правильной игре?

5. Магический квадрат — это квадратная таблица, заполненная числами так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Имеется магический квадрат 4×4, заполненный числами от 1 до 16. Докажите, что к нему нельзя добавить четыре строки снизу и четыре столбца справа и заполнить новые клетки числами от 17 до 64, чтобы образовался магический квадрат 8×8.

6. Докажите, что произведение трех последовательных нечетных натуральных чисел не может быть точным квадратом.

7. В кружке у каждого школьника ровно три друга, а у любых двух, не являющихся друзьями, есть общий друг. Известно, что Петя, Вася и Коля дружат друг с другом, а также Маша, Глаша и Даша дружат друг с другом. Какое наибольшее количество школьников может быть в этом кружке?

8. Найдите количество способов распределить по одной, две или три конфеты среди 2007 участников Уральского турнира, чтобы общее количество конфет делилось на 3.

XXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 16-22.02.2007

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вова вырезает из квадрата 20×20 по линиям, параллельным сторонам квадрата, прямоугольники 1×13. Докажите, что ему не удастся вырезать более 28 таких прямоугольников.

2. Незнайка утверждает, что он может отметить на плоскости 16 точек таких, что, какое бы натуральное число от 1 до 7 ему ни назвали, он сможет указать прямую, на которой лежит ровно столько отмеченных точек. Прав ли Незнайка?

3. В республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Лимон» любят лимоны, а среди избирателей, голосовавших за другие партии, 90 % лимоны не любят. Сколько процентов голосов набрала партия «Лимон», если ровно 46 % участвовавших в голосовании любят лимоны?

4. По кругу расставлены 50 фишек. Два игрока по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает первый игрок (который начинает игру); в противном случае выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Имеется магический квадрат 3×3, заполненный числами от 1 до 9. Докажите, что к нему нельзя добавить три строки и три столбца, заполнив их числами от 10 до 36, чтобы получился магический квадрат 6×6. (Магический квадрат — это квадратная таблица, заполненная натуральными числами так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны).

6. Даны 4 сосуда, водопроводный кран и раковина. Как узнать, что больше: половина объема первого сосуда плюс шестая часть объема второго сосуда или треть объема третьего сосуда плюс пятая часть объема четвертого сосуда?

7. В компании из k человек каждый имеет ровно трех знакомых, любые двое незнакомых имеют общего знакомого и есть трое попарно знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.

8. Найдите количество способов раздать каждому из 2007 детей по одной, две или три конфеты так, чтобы общее количество конфет делилось на три.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2007

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите ребус ЛОЖКА+ЛОЖКА+ЛОЖКА = ВИЛКА (разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые).

2. Незнайка утверждает, что он может отметить на плоскости 12 точек таких, что какое бы натуральное число от 1 до 6 ему ни назвали, он сможет указать прямую, на которой лежит ровно столько отмеченных точек. Прав ли Незнайка?

3. В республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Лимон» любят лимоны, а среди избирателей, голосовавших за другие партии, 90 % лимоны не любят. Сколько процентов голосов набрала партия «Лимон», если ровно 46 % участвовавших в голосовании любят лимоны?

4. Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5, 8 и 11 грамм соответственно. Лиса стала им помогать. Ей разрешили от любых двух кусочков отрезать по 1 грамму сыра (эти обрезки лиса съедает). Сможет ли лиса после нескольких таких отрезаний оставить ёжикам равные кусочки сыра?

5. Имеется магический квадрат 3×3, заполненный числами от 1 до 9. Докажите, что к нему нельзя добавить три строки и три столбца, заполнив их числами от 10 до 36, чтобы получился магический квадрат 6×6. (Магический квадрат — это квадратная таблица, заполненная натуральными числами так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны).

6. Даны 2 сосуда, водопроводный кран и раковина. Как узнать, что больше: треть объема первого сосуда или четверть объема второго сосуда?

7. В компании из k человек каждый имеет ровно трех знакомых, любые двое незнакомых имеют общего знакомого и есть трое попарно знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.

8. Найдите количество способов раздать каждому из 20 детей по одной две или три конфеты так, чтобы общее количество конфет делилось на три.