XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.11.2002

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. У Юры и Сережи есть по 10 карточек. На каждой карточке записаны два целых числа (по одному на каждой стороне) таким образом, что у каждого мальчика есть все числа от 1 до 20 (при этом числа на карточках у Юры и Сережи могут быть расставлены по-разному). Каждый из мальчиков знает, какие карточки у партнера. Мальчики по очереди выкладывают свои карточки на стол. Проигрывает тот, после хода которого на столе окажутся две карточки с одинаковыми числами сверху. Начинает Юра. Кто из игроков сможет обеспечить себе выигрыш независимо от действий соперника?

2. Дано натуральное число a. Составляется последовательность $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n^3 + 1999$ (при $n \geq 1$). Докажите, что в этой последовательности встретится не более одного квадрата натурального числа.

3. В клетках квадрата 13×13 расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел четна, а в любом кресте из пяти клеток сумма чисел нечетна. Докажите, что сумма чисел в углах квадрата 13×13 делится на 4.

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки K, L и M соответственно, а на биссектрисе угла A – точка N. Оказалось, что $CLKN$ и $MLNA$ – параллелограммы. Докажите, что $AB = AC$.

5. Среди 11 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.

6. Сколько существует стозначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

7. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Прямая, параллельная BC, проходящая через точку D, пересекает отрезок AE в точке K. Прямая, параллельная AB, проходящая через точку E, пересекает отрезок CD в точке L. Докажите, что $BD + DK = BE + EL$.

8. При каких натуральных числах n уравнение $|x| + |x+1| + \cdots + |x+n| = 2n - 2$ имеет решение?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.11.2002

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. У Юры и Сережи есть по 10 карточек. На каждой карточке записаны два целых числа (по одному на каждой стороне) таким образом, что у каждого мальчика есть все числа от 1 до 20 (при этом числа на карточках у Юры и Сережи могут быть расставлены по-разному). Каждый из мальчиков знает, какие карточки у партнера. Мальчики по очереди выкладывают свои карточки на стол. Проигрывает тот, после хода которого на столе окажутся две карточки с одинаковыми числами сверху. Начинает Юра. Кто из игроков сможет обеспечить себе выигрыш независимо от действий соперника?

2. Дано натуральное число a. Составляется последовательность $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n^3 + 7n + 4$ (при $n \geq 1$). Докажите, что в этой последовательности встретится не более одного квадрата натурального числа.

3. В клетках квадрата 13×13 расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел четна, а в любом кресте из 5 клеток сумма чисел нечетна. Докажите, что сумма чисел в углах нашего квадрата 13×13 делится на 4.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите, что $AB>BL$.

5. Среди 5 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.

6. Сколько существует стозначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

7. На сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Прямая, параллельная BC, проходящая через точку D, пересекает отрезок AE в точке K. Прямая, параллельная AB, проходящая через точку E, пересекает отрезок CD в точке L. Оказалось, что $BD + DK = BE + EL$. Докажите, что KL параллельна AC.

8. При каких натуральных числах n уравнение $|x| + |x+1| + \cdots + |x+n| = n$ имеет решение?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

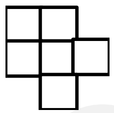
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.11.2002

ВТОРАЯ ЛИГА

1. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Однажды 12 островитян, собравшиеся в компанию, сделали такие заявления. Двое сказали: «Ровно двое из здесь присутствующих – лжецы», еще четверо сказали: «Ровно четверо среди здесь присутствующих – лжецы», последние шестеро сказали: «Ровно шестеро среди присутствующих – лжецы». Сколько лжецов могло быть в этой компании?

2. Комьютерная программа каждую секунду заменяет записанное на экране число n на число n^2+3. Вначале на экране находилось число 2002. Докажите, что на экране никогда не появится квадрат натурального числа.

3. Клетки квадрата 3×3 раскрашены в черный и белый цвета так, что количество черных клеток в любом квадрате 2×2 четно, а в любой фигуре вида, показанного на рисунке справа – нечетно. Докажите, что все угловые клетки покрашены в один цвет.



4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите, что $AB>BL$.

5. Среди 5 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.

6. Сколько существует десятизначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

7. Отцу и двум сыновьям вместе 48 лет. Через пять лет возраст отца будет вдвое больше суммы возрастов сыновей, а Юре будет столько лет, сколько Коле сейчас. Сколько лет отцу, Юре и Коле?

8. Докажите, что при всех x верно неравенство $|x|+|x+1|+|x+3|+|x+4|\geq 4$.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.11.2002

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Отцу и двум сыновьям вместе 48 лет. Через пять лет возраст отца будет вдвое больше суммы возрастов сыновей, а Юре будет столько лет, сколько Коле сейчас. Сколько лет отцу, Юре и Коле?

2. При каких натуральных числах n уравнение $|x|+|x+1|+\cdots+|x+n|=n$ имеет решение?

3. В клетках квадрата 7×7 расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 и в любом кресте из 5 клеток сумма чисел четна. Докажите, что в углах нашего квадрата 7×7 стоят одинаковые числа.

4. Может ли каждая из диагоналей выпуклого пятиугольника быть меньше противоположной стороны?

5. Среди 5 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.

6. Сколько существует десятизначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

7. Компьютерная программа каждую секунду заменяет записанное на экране число n на число n^2+3. Вначале на экране находилось число 2002. Докажите, что на экране никогда не появится квадрат натурального числа.

8. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Однажды 12 островитян, собравшиеся в компанию, сделали такие заявления. Двое сказали: «Ровно двое из здесь присутствующих – лжецы», еще четверо сказали: «Ровно четверо среди здесь присутствующих – лжецы», последние шестеро сказали: «Ровно шестеро среди присутствующих – лжецы». Сколько лжецов могло быть в этой компании?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

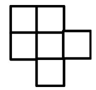
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 3.11.2002

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Отцу и двум сыновьям вместе 48 лет. Через пять лет возраст отца будет вдвое больше суммы возрастов сыновей, а Юре будет столько лет, сколько Коле сейчас. Сколько лет отцу, Юре и Коле?

2. В сенате – 100 сенаторов. Известно, что среди любых пяти сенаторов найдется по крайней мере один продажный. Сколько продажных сенаторов может быть в сенате? Укажите все возможности и докажите, что других возможностей нет.

3. Клетки квадрата 3×3 раскрашены в черный и белый цвета так, что количество черных клеток в любом квадрате 2×2 четно, а в любой фигуре вида, показанного на рисунке справа – нечетно. Докажите, что все угловые клетки покрашены в один цвет.



4. У трехзначного числа стерли одну из цифр. Оказалось, что произведение получившегося двузначного числа на исходное трехзначное равно 2002. Каким могло быть исходное трехзначное число?

5. Среди 5 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.

6. Сколько существует десятизначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

7. Компьютерная программа каждую секунду заменяет записанное на экране число n на число n^2+8. Вначале на экране находилось число 2002. Докажите, что на экране никогда не появится квадрат натурального числа.

8. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошел 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Когда будет следующий автобус?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2002

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Существует ли такая последовательность из 1000 квадратов натуральных чисел, что любая сумма нескольких ее первых членов также является точным квадратом?

2. Пусть x_n – количество n-значных чисел, в записи которых все цифры не больше 2, и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Докажите, что $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n > 2$.

3. В клетках прямоугольной таблицы 13×13 расставлены натуральные числа. Разрешается выбрать любой прямоугольник, составленный из трех клеток таблицы, и изменить на 1 стоящие в его клетках числа следующим образом: крайние уменьшить, а среднее увеличить или наоборот. Известно, что с помощью таких операций можно получить единицы во всех клетках. Докажите, что этого можно добиться, не получая в процессе изменений отрицательных чисел.

4. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

5. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B отмечена точка D таким образом, что $BD=BA$. Точка M – середина стороны AC. Биссектриса угла ABC пересекает прямую DM в точке P. Докажите, что $\angle BAP = \angle ACB$.

6. Известно, что $1 \le a \le 2 \le b \le 3 \le c \le 4$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2-abc \ge 4$.

7. Какое наибольшее число точек можно отметить на плоскости так, чтобы любые три из них образовывали треугольник с углами менее 120°?

8. Докажите, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b найдутся такие целые числа p и q, что числа $p+na$ и $q+nb$ взаимно просты при любом натуральном n.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2002

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существует ли такая последовательность из 1000 квадратов натуральных чисел, что любая сумма нескольких ее первых членов также является точным квадратом?

2. Пусть x_n – количество n-значных чисел, в записи которых все цифры не больше 2, и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Докажите, что $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n > 2$.

3. В клетках прямоугольной таблицы 13×13 расставлены натуральные числа. Разрешается выбрать любой прямоугольник составленный из трех клеток таблицы, и изменить стоящие в его клетках числа на 1 (крайние уменьшить, а среднее увеличить или наоборот). Известно, что с помощью таких операций можно получить единицы во всех клетках. Докажите, что этого можно добиться, не получая в процессе отрицательных чисел.

4. В стране Юрландии некоторые города соединены дорогами (не проходящими через другие города), причем из любого города можно добраться до любого другого. В один несчастный день злобное племя субчиков захватило некоторый город. Каждый следующий день субчики либо захватывали город, соседний с одним из захваченных, либо освобождали захваченный город, все соседние с которым захвачены. При этом никакой город не захватывали больше одного раза. Докажите, что если субчики уже ничего не могут захватить, то из любых двух соседних городов хотя бы один захвачен.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на боковую сторону BC опущена высота AH. Точка L – основание перпендикуляра из H на сторону AB. Оказалось, что $AL = AB/4$. Найдите углы треугольника ABC.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + yz = 2 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$.

7. Какое наибольшее число точек можно отметить на плоскости так, чтобы любые три из них образовывали треугольник с углами менее 120°?

8. Известно, что $1 \le a \le 2 \le b \le 3 \le c \le 4$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2-abc \ge 4$.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2002

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке таблицы 3×3 лежит по камешку. Известно, что каждый камешек весит в k раз меньше, чем все вместе взятые камешки, лежащие в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что можно выкинуть один камешек и разложить все оставшиеся на две кучки равного веса.

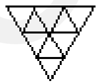
2. Пусть x_n – количество n-значных чисел, в записи которых все цифры не больше 2, и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Докажите, что $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n > 2$.

3. В клетках таблицы расставлены натуральные числа как показано на рисунке. Разрешается прибавить или отнять по 1 к трем клеткам, образующим прямоугольник 1×3. Можно ли с помощью таких операций получить нули во всех клетках?

1	2	3	4	5
2	3	4	5	4
3	4	5	4	3
4	5	4	3	2
5	4	3	2	1

4. В стране Юрландии некоторые города соединены дорогами (не проходящими через другие города), причем из любого города можно добраться до любого другого. В один несчастный день злобное племя субчиков захватило некоторый город. Каждый следующий день субчики либо захватывали город, соседний с одним из захваченных, либо освобождали захваченный город, все соседние с которым захвачены. При этом никакой город не захватывали больше одного раза. Докажите, что если субчики уже ничего не могут захватить, то из любых двух соседних городов хотя бы один захвачен.

5. Дан белый треугольник, разбитый на 9 равных треугольных клеток. За один ход можно окрасить черной краской любую белую клетку. Петя и Вася ходят по очереди, первым ходит Петя. Проигрывает тот, после хода которого впервые появится полностью окрашенный треугольник из 4 клеток. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш, независимо от игры противника?



6. Пусть n – натуральное число, большее 6. Докажите, что найдутся четыре различных правильных несократимых дроби со знаменателем n.

7. У квадрата отметили все вершины и внутреннюю точку, не лежащую ни на одной из его диагоналей. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, один из углов которого не меньше 120°.

8. Найдите все числа, удовлетворяющие условиям $p+q = r^n$, $p-q = r^m$, если p, q, r – различные простые числа, а n, m – целые числа.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2002

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке таблицы 3×3 лежит по камешку. Известно, что каждый камешек весит вдвое меньше, чем все вместе взятые камешки, лежащие в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что можно выкинуть один камешек и разложить все оставшиеся на две кучки равного веса.

2. Найдите все решения ребуса $\overline{ABBA} + \overline{AA} = \overline{CDDC}$.

3. В клетках таблицы расставлены натуральные числа как показано на рисунке. Разрешается прибавить по 1 к двум клеткам, соседним по стороне, или вычесть по 1 из двух клеток, соседних по стороне. Можно ли с помощью таких операций получить нули во всех клетках?

1	2	3	4	5
2	3	4	5	4
3	4	5	4	3
4	5	4	3	2
5	4	3	2	1

4. В стране Юрландии некоторые города соединены дорогами (не проходящими через другие города), причем из любого города можно добраться до любого другого. В один несчастный день злобное племя субчиков захватило некоторый город. Каждый следующий день субчики либо захватывали город, соседний с одним из захваченных, либо освобождали захваченный город, все соседние с которым захвачены. При этом никакой город не захватывали больше одного раза. Докажите, что если субчики уже ничего не могут захватить, то из любых двух соседних городов хотя бы один захвачен.

5. Играют Петя и Вася, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя. Они взяли для игры белый кубик. В свой ход играющий пишет первую букву своего имени на грани, пока еще чистой. Выигрывает тот, чей инициал, появится на трех гранях, имеющих общую вершину. Кто выиграет, Петя или Вася?

6. Пусть n – натуральное число, большее 2. Докажите, что найдутся две различных правильных несократимых дроби со знаменателем n.

7. У квадрата отметили все вершины и внутреннюю точку, не лежащую ни на одной из его диагоналей. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, один из углов которого не меньше 120°.

8. Разрежьте квадрат на выпуклые пятиугольники.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 4.11.2002

ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке таблицы 3×3 лежит по камешку. Известно, что каждый камешек весит в k раз меньше, чем все вместе взятые камешки, лежащие в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что можно выкинуть один камешек и разложить все оставшиеся на две кучки равного веса.

2. Пусть x_n – количество n-значных чисел, в записи которых нет нулей и все цифры не больше 3, и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Докажите, что $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n > 2$.

3. В треугольнике ABC отрезок серединного перпендикуляра к стороне BC, заключенный внутри треугольника, равен половине высоты, опущенной из вершины A. AB=2AC. Найдите углы треугольника ABC.

4. В стране Юрландии некоторые города соединены дорогами (не проходящими через другие города), причем из любого города можно добраться до любого другого. В один несчастный день злобное племя субчиков захватило некоторый город. Каждый следующий день субчики либо захватывали город, соседний с одним из захваченных, либо освобождали захваченный город, все соседние с которым захвачены. При этом никакой город не захватывали больше одного раза. Докажите, что если субчики уже ничего не могут захватить, то из любых двух соседних городов хотя бы один захвачен.

5. Играют Петя и Вася, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя. Они взяли для игры белый кубик. В свой ход играющий пишет первую букву своего имени на грани, пока еще чистой. Выигрывает тот, чей инициал, появится на трех гранях, имеющих общую вершину. Кто выиграет, Петя или Вася?

6. Пусть n – натуральное число, большее 2. Докажите, что найдутся две различных правильных несократимых дроби со знаменателем n.

7. У квадрата отметили все вершины и внутреннюю точку, не лежащую ни на одной из его диагоналей. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, один из углов которого не меньше 120°.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.11.2002

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На медиану BM треугольника ABC опустили перпендикуляр AL и перпендикуляр DK из некоторой точки D на стороне AB (L и K –различные точки, лежащие внутри BM). Оказалось, что $BK = LM$. Докажите, что $CD = BD+BA$.

2. Докажите, что уравнение $x^x = y^3 + z^3$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

3. Дан треугольник. Каждую минуту самая большая его сторона заменяется на сумму двух других сторон, уменьшенную на длину этой стороны, и из двух старых сторон и этой новой составляется новый треугольник (если это, конечно, возможно). Оказалось, что такой процесс можно продолжать бесконечно долго. Найдите углы исходного треугольника.

4. По окружности расставлено 41 натуральное число. Сумма всех расставленных чисел равна 100. Докажите, что можно вычеркнуть несколько идущих подряд чисел, а оставшиеся разбить на две группы чисел, идущих подряд, так, что суммы чисел в этих двух группах равны и делятся на 10.

5. Нечетное простое число p и натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 \vdots p^4$ и $a(a+b)^2 \vdots p^4$. Докажите, что $a(a+b) \vdots p^4$.

6. На сторонах AB, BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P,Q и R. соответственно такие, что $PQ \parallel AC$ и $QR \parallel BD$. Точка M – середина отрезка PR. Докажите, что прямая MQ проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$. .

7. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n существует такое рациональное число x, что $\frac{1}{3} \le \{mx\} \le \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} \le \{nx\} \le \frac{2}{3}$. Через $\{y\}$ обозначается дробная часть числа y.

8. Треугольник разбили линиями, параллельными его сторонам, на 49 равных маленьких треугольников (МТ). Петя отметил один из МТ невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по сторонам МТ, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.11.2002

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC угол A – наименьший. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка X, а на продолжении стороны AB за точку B – точка Y. Докажите, что $AX+AY \geq BX+CY$.

2. Дан треугольник. Каждую минуту самая большая его сторона заменяется на сумму двух других сторон, уменьшенную на длину этой стороны, и из двух старых сторон и этой новой составляется новый треугольник (если это, конечно, возможно). Оказалось, что такой процесс можно продолжать бесконечно долго. Найдите углы исходного треугольника.

3. Решите уравнение $x^x + y^y + z^z + t^t = \overline{xyzt}$, где $\overline{xyzt}$ – четырехзначное число с цифрами x, y, z, t (не обязательно различными).

4. На банкете присутствовало 14 членов жюри, которые выпили 17 бутылок лимонада. Каждую бутылку лимонада члены жюри выпили вчетвером. Докажите, что есть два члена жюри, которые не пили лимонад из одной бутылки.

5. Для нечетного простого числа p и натуральных чисел a и b известно, что $a^2 + b^2 \vdots p^4$ и $a(a+b)^2 \vdots p^4$. Докажите, что $a(a+b) \vdots p^4$.

6. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка M. На стороне CD выбрана такая точка P, что $AP \perp MD$. На стороне AB выбрана такая точка Q, что $DQ \perp MA$. Докажите, что прямая PQ проходит через центр квадрата.

7. Докажите, что для любых четырех натуральных чисел a, b, c, и d существует такое рациональное число x, что дробные части всех четырех чисел ax, bx, cx и dx больше ½. *Дробной частью* числа y называется разность между y и наибольшим целым числом, не превосходящим y.

8. Плоскость разбита тремя семействами параллельных прямых на равные треугольники (РТ). Петя нарисовал треугольник, состоящий из 1024 РТ, и отметил один из входящих в него РТ невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по сторонам РТ, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

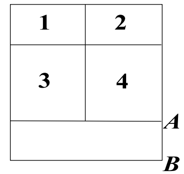
XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.11.2002

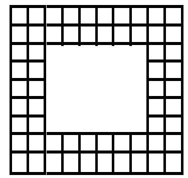
ВТОРАЯ ЛИГА

1. У каждого из 7 членов команды не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Докажите, что капитану достаточно трех комнат для того, чтобы обеспечить бесперебойную работу всей команды.

2. Квадрат разделили прямолинейными разрезами, как показано на рисунке. Оказалось, что части 3 и 4 – квадраты, периметр части 1 равен 14 см, и AB = 3 см. Найдите сторону исходного квадрата.



3. Членами клуба являются 10 джентльменов. За неделю каждый из них встретился с каждым ровно по одному разу, и при встрече каждый просил другого передавать приветы всем, кого тот еще увидит. Сколько было передано приветов?



4. Можно ли квадрат 8×8 разрезать на три части так, чтобы из них можно было сложить «рамку» (см рис.)

5. Бензиновая мафия разводит бензин водой. Для этих целей у неё имеются две одинаковые цистерны, к каждой из которых подведено по два крана. Из одного крана течёт вода, а из другого – чистый бензин. Если открыть оба крана с водой, а краны с бензином не открывать, то цистерны заполнятся одновременно. Если открыть все четыре крана, то к моменту заполнения в первой цистерне будет треть воды и две трети бензина, а во второй цистерне к моменту заполнения будет четверть бензина и три четверти воды. Мафиози открыли все краны, дождались, пока заполнится одна из цистерн, а затем все краны закрыли и слили полученные жидкости в одну большую цистерну. Какую часть от всей полученной жидкости составляет чистый бензин?

6. В равностороннем треугольнике ABC на продолжении стороны AC за точку C отмечена точка X, а на продолжении стороны AB за точку B – точка Y. Докажите, что $AX+AY \geq BX+CY$.

7. Решите уравнение $x^x + y^y + z^z + t^t = \overline{xyzt}$, где $\overline{xyzt}$ – четырехзначное число с цифрами x, y, z, t (не обязательно различными).

8. Плоскость разбита тремя семействами параллельных прямых на равные треугольники (РТ). Петя нарисовал треугольник, состоящий из 1024 РТ, и отметил один из входящих в него РТ невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по сторонам РТ, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

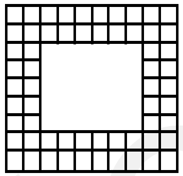
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.11.2002

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. У каждого из 7 членов команды не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Докажите, что капитану достаточно трех комнат для того, чтобы обеспечить бесперебойную работу всей команды.

2. Докажите, что для любых четырех натуральных чисел a, b, c, и d найдется такое рациональное число x, что дробные части всех четырех чисел ax, bx, cx и dx больше ½. *Дробной частью* числа y называется разность между y и наибольшим целым числом, не превосходящим y.

3. Членами клуба являются 10 джентльменов. За неделю каждый из них встретился с каждым ровно по одному разу, и при встрече каждый просил другого передавать приветы всем, кого тот еще увидит. Сколько было передано приветов?



4. Можно ли разрезать квадрат 8×8 на три части так, чтобы из них можно было сложить «рамку» шириной в две клетки (см. рис.)

5. Бензиновая мафия разводит бензин водой. Для этих целей у неё имеются две одинаковые цистерны, к каждой из которых подведено по два крана. Из одного крана течёт вода, а из другого – чистый бензин. Если открыть оба крана с водой, а краны с бензином не открывать, то цистерны заполнятся одновременно. Если открыть все четыре крана, то к моменту заполнения в первой цистерне будет треть воды и две трети бензина, а во второй цистерне к моменту заполнения будет четверть бензина и три четверти воды. Мафиози открыли все краны, дождались, пока заполнится одна из цистерн, а затем все краны закрыли и слили полученные жидкости в одну большую цистерну. Какую часть от всей полученной жидкости составляет чистый бензин?

6. Дан треугольник. Каждую минуту самая большая его сторона заменяется на сумму двух других сторон, уменьшенную на длину этой стороны, и из двух старых сторон и этой новой составляется новый треугольник (если это, конечно, возможно). Оказалось, что такой процесс можно продолжать бесконечно долго. Найдите углы исходного треугольника.

7. Решите уравнение $x^x + y^y + z^z + t^t = \overline{xyzt}$, где $\overline{xyzt}$ – четырехзначное число с цифрами x, y, z, t (не обязательно различными).

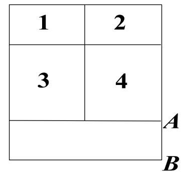
8. Плоскость разбита тремя семействами параллельных прямых на равные треугольники (РТ). Петя нарисовал треугольник, состоящий из 1024 РТ, и отметил один из входящих в него РТ невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по сторонам РТ, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 6.11.2002

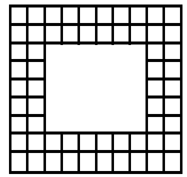
ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Получите число 2002, используя ровно по одному разу каждую из цифр от 1 до 9, а также любое количество знаков арифметических действий +, –, ×, : и скобок.



2. Квадрат разделили прямолинейными разрезами, как показано на рисунке. Оказалось, что части 3 и 4 – квадраты, периметр части 1 равен 14 см, и AB=3 см. Найдите сторону исходного квадрата.

3. Членами клуба являются 10 джентльменов. За неделю каждый из них встретился с каждым ровно по одному разу, и при встрече каждый просил другого передавать приветы всем, кого тот еще увидит. Сколько было передано приветов?



4. Можно ли разрезать квадрат 8×8 на три части так, чтобы из них можно было сложить «рамку» шириной в две клетки (см. рис).

5. Вася с Федей на рыбалке поймали 6 лещей, 3 окуней и несколько плотвичек. Каждый лещ весит 3 кг, окунь – 5 кг, а плотвичка – килограмм. При дележке Вася хотел получить либо 5 лещей и 7 плотвичек, либо 2 окуней и 9 плотвичек, а Федя хотел хотя бы 27 кг рыбы, в которых минимум 7 плотвичек. Какое максимальное количество плотвичек могли они поймать, если улов разделить не получилось?

6. Дан треугольник со сторонами a, b и c, причем сторона a больше стороны b на 5 см. Каждую минуту самая большая сторона треугольника заменяется на сумму двух других сторон, уменьшенную на длину этой стороны (если это, конечно, возможно). Можно ли такой процесс продолжать бесконечно долго?

7. Решите уравнение: $x^x + y^y = \overline{xy} + 3$, где выражение $\overline{xy}$ обозначает двухзначное число с цифрами x, y.

8. Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными сторонам, на 9 равных правильных треугольников. Петя отметил один из входящих в него треугольников невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по линиям разбиения, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.11.2002

ВЫСШАЯ ЛИГА (БОИ ЗА 1-4 МЕСТА)

1. В треугольнике ABC $AB < AC$. Прямые, проходящие через вершины B и C параллельно прямым AC и AB, пересекают биссектрису внешнего угла при вершине A в точках D и E соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку DE пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $FC = AB$.

2. 10 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл, проиграл и свел вничью по 3 партии. Известно, что нет трех шахматистов, которые набрали в матчах между собой ровно по 1 очку. Докажите, что всех десятерых шахматистов можно поставить по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью дается 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

3. На множестве всех целых чисел введена операция $*$, обладающая следующими свойствами:
1) $0*a = a$ для любого целого числа;
2) $a*(b*c) = c*(a*b)$ для любых целых чисел a, b и c.
Докажите, что $(a*b)*c = a*(b*c)$ для любых целых чисел a, b и c.

4. 100 школьников писали олимпиаду, проходившую в два тура. Оказалось, что любые два школьника во время хотя бы одного из туров сидели в комнатах с разным числом участников. Докажите, что в первый день была ровно одна комната ровно с 10 участниками.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа 1, 2, …, n дает ровно k различных остатков.

6. AK– высота треугольника ABC, точка M – середина стороны AC. На сторону AB опустили перпендикуляр KL и перпендикуляр MN. Оказалось, что $LN = AB/4$. Докажите, что $\angle C=2\angle B$.

7. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d = -2$ и $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел не больше –1.

8. Найдите все такие натуральные n, большие 1, что все простые делители числа n^6-1 являются делителями числа $(n^3-1)(n^2-1)$.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

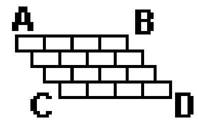
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.11.2002

ВЫСШАЯ ЛИГА (БОИ ЗА 5-8 МЕСТА)

1. В треугольнике ABC $AB < AC$. Прямые, проходящие через вершины B и C параллельно прямым AC и AB, пересекают биссектрису внешнего угла при вершине A в точках D и E соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку DE пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $FC = AB$.

2. 10 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл и проиграл по 4 партии и одну партию свел вничью. Докажите, что можно выбрать трех шахматистов и поставить их по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него.

3. На знаменитой картине да Винчи "Стена плача" изображено n горизонтальных рядов по n одинаковых кирпичей, каждый ряд со сдвигом на полкирпича относительно предыдущего ряда (см. рис.). Сколько раз отрезок AD пересечет вертикальные и горизонтальные щелочки между кирпичами?



4. В столовой в ряд поставлено 100 одинаковых стаканов, в каждом из которых налито некоторое (не обязательно равное) количество компота. Дежурный от скуки взял первый стакан и перелил оттуда во второй стакан столько компота, сколько туда вошло. Потом он перелили из второго стакана в третий столько компота, сколько туда вошло, и так далее до 99-го стакана. Затем он взял сотый стакан и перелил из него в 99-й стакан столько, сколько туда влезло, и так далее в обратном порядке. В конце концов оказалось, что ровно 10 стаканов остались пустыми. Докажите, что в самом начале в первых 12 стаканах компота набралось бы не менее одного полного стакана.

5. Докажите, что существует число, которое при делении на числа 1, 2, …, 2002 дает ровно 1242 различных остатка.

6. AK– высота треугольника ABC, точка M – середина стороны AC. На сторону AB опустили перпендикуляр KL и перпендикуляр MN. Оказалось, что $LN = AB/4$. Докажите, что $\angle C=2\angle B$.

7. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d = -2$ и $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел не больше –1.

8. Найдите все такие натуральные n, большие 1, что все простые делители числа n^4-1 являются делителями числа $(n^3-1)(n^2-1)$.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.11.2002

ВТОРАЯ ЛИГА

1. В турнире по волейболу участвовали n команд. Известно, что команда «зяблики» проиграла команде «воробьи», но при этом набрала очков больше, чем «ястребы», «орлы» и «коршуны», вместе взятые. При каком наименьшем n это возможно? Ничьих в волейболе не бывает, а каждая команда играла с каждой по разу.

2.. В треугольнике ABC выбрали точку A_1 на стороне BC и точку B_1 на AC. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, причем $\frac{AO}{A_1O}=\frac{BO}{B_1O}=2$. Докажите, что AA_1 и BB_1 – медианы треугольника ABC

3. Кровати в казарме стоят в форме квадрата 8×8. Рядовой Чонкин заправляет кровати, а прапорщик Миляга принимает его работу. Если рядом с только что заправленной кроватью есть ровно две незаправленные, то прапорщик расправляет ее и влепляет рядовому наряд. Докажите, что рядовой Чонкин может заправлять кровати в таком порядке, чтобы не получить ни одного наряда.

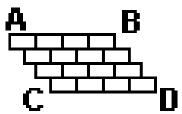
4. В столовой в ряд поставлено 100 одинаковых стаканов, в каждом из которых налито некоторое (не обязательно равное) количество компота. Дежурный от скуки взял первый стакан и перелил оттуда во второй стакан столько компота, сколько туда вошло. Потом он перелили из второго стакана в третий столько компота, сколько туда вошло, и так далее до 99-го стакана. Затем он взял сотый стакан и перелил из него в 99-й стакан столько, сколько туда влезло, и так далее в обратном порядке. В конце концов оказалось ровно 10 пустых стаканов. Докажите, что в самом начале в первых 12 стаканах компота набралось бы не менее одного полного стакана.

5. Докажите, что существует число, которое при делении на числа 1, 2, …, 100 дает ровно 20 различных остатков.

6. У мастера имеется станок. Если положить туда доску в виде прямоугольника с длиной a и шириной b, то станок распилит её посередине, а затем переставит две половинки и склеит их так, что получится доска с длиной $2a$ и шириной $b/2$. Доказать, что, применив такую процедуру несколько раз, можно получить доску, у которой длинная сторона больше короткой не более чем в 2 раза (либо обе стороны равны).

7. 15 школьников писали олимпиаду, проходившую в два тура. Докажите, что их можно рассадить по комнатам таким образом, что любые два школьника во время хотя бы одного из туров сидели в комнатах с разным числом участников.

8. На знаменитой картине да Винчи "Стена плача" изображено n горизонтальных рядов по n одинаковых кирпичей, каждый ряд со сдвигом на полкирпича относительно предыдущего ряда (см. рис.). Сколько раз отрезок BC пересечет вертикальные и горизонтальные щелочки между кирпичами?



XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

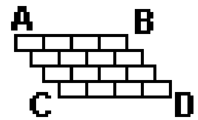
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.11.2002

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC $AB < AC$. Прямые, проходящие через вершины B и C параллельно прямым AC и AB, пересекают биссектрису внешнего угла при вершине A в точках D и E соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку DE пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $FC = AB$.

2. 10 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл и проиграл по 4 партии и одну партию свел вничью. Докажите, что можно выбрать трех шахматистов и поставить их по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него.

3. На знаменитой картине да Винчи "Стена плача" изображено n горизонтальных рядов по n одинаковых кирпичей, каждый ряд со сдвигом на полкирпича относительно предыдущего ряда (см. рис.). Сколько раз отрезок AD пересечет вертикальные и горизонтальные щелочки между кирпичами?



4. В столовой в ряд поставлено 100 одинаковых стаканов, в каждом из которых налито некоторое (не обязательно равное) количество компота. Дежурный от скуки взял первый стакан и перелил оттуда во второй стакан столько компота, сколько туда вошло. Потом он перелили из второго стакана в третий столько компота, сколько туда вошло, и так далее до 99-го стакана. Затем он взял сотый стакан и перелил из него в 99-й стакан столько, сколько туда влезло, и так далее в обратном порядке. В конце концов оказалось, что ровно 10 стаканов остались пустыми. Докажите, что в самом начале в первых 12 стаканах компота набралось бы не менее одного полного стакана.

5. Докажите, что существует число, которое при делении на числа 1, 2, …, 2002 дает ровно 1242 различных остатка.

6. AK– высота треугольника ABC, точка M – середина стороны AC. На сторону AB опустили перпендикуляр KL и перпендикуляр MN. Оказалось, что $LN = AB/4$. Докажите, что $\angle C=2\angle B$.

7. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d = –2$ и $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел не больше –1.

8. Найдите все такие натуральные n, большие 1, что все простые делители числа $n^4–1$ являются делителями числа $(n^3–1)(n^2–1)$.

XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.11.2002

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Взяты два двузначных числа. Когда первое умножили на 100, оно разделилось на второе без остатка. Доказать, что полученное частное не может быть меньше 15

2. 10 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл и проиграл по 4 партии и одну партию свел вничью. Докажите, что можно выбрать трех шахматистов и поставить их по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него.

3. Кровати в казарме стоят в форме квадрата 100×100. Рядовой Чонкин заправляет кровати, а прапорщик Миляга принимает его работу. Если рядом с только что заправленной кроватью есть ровно две незаправленные, то прапорщик расправляет ее и влепляет рядовому наряд. Докажите, что рядовой Чонкин может заправлять кровати в таком порядке, чтобы не получить ни одного наряда.

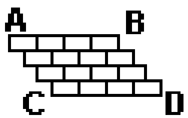
4. В столовой в ряд поставлено 100 одинаковых стаканов, в каждом из которых налито некоторое (не обязательно равное) количество компота. Дежурный от скуки взял первый стакан и перелил оттуда во второй стакан столько компота, сколько туда вошло. Потом он перелили из второго стакана в третий столько компота, сколько туда вошло, и так далее до 99-го стакана. Затем он взял сотый стакан и перелил из него в 99-й стакан столько, сколько туда влезло, и так далее в обратном порядке. В конце концов оказалось, что ровно 10 стаканов остались пустыми. Докажите, что в самом начале в первых 12 стаканах компота набралось бы не менее одного полного стакана.

5. При каких натуральных n существует число, которое при делении на числа 1, 2, …, n дает ровно n–3 различных остатка?

6. У мастера имеется станок. Если положить туда доску в виде прямоугольника с длиной a и шириной b, то станок распилит её посередине, а затем переставит две половинки и склеит их так, что получится доска с длиной $2a$ и шириной $b/2$. Доказать, что, применив такую процедуру несколько раз, можно получить доску, у которой длинная сторона больше короткой не более чем в 2 раза (либо обе стороны равны).

7. Школьники писали олимпиаду, проходившую в два тура. В каждом кабинете писали хотя бы два участника. Докажите, что найдутся два школьника, которые во время обоих туров сидели в кабинетах с одинаковым числом участников.

8. На знаменитой картине да Винчи "Стена плача" изображено n горизонтальных рядов по n одинаковых кирпичей, каждый ряд со сдвигом на полкирпича относительно предыдущего ряда (см. рис.). Сколько раз отрезок AD пересечет вертикальные и горизонтальные щелочки между кирпичами?



XX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ЧЕБОКСАРЫ, 1–7.11.2002

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 7.11.2002

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В турнире по волейболу участвовали n команд. Известно, что команда «зяблики» проиграла команде «воробьи», но при этом набрала очков больше, чем «ястребы», «орлы» и «коршуны», вместе взятые. При каком наименьшем n это возможно? Ничьих в волейболе не бывает, а каждая команда играла с каждой по разу.

2. Прямая l – график функции $y = 3x+1$. Прямая m симметрична ей относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Графиком какой линейной функции является прямая m?

3. Кровати в казарме стоят в форме квадрата 10×10. Рядовой Чонкин заправляет кровати, а прапорщик Миляга принимает его работу. Если рядом с только что заправленной кроватью есть ровно две незаправленные, то прапорщик расправляет ее и влепляет рядовому наряд. Докажите, что рядовой Чонкин может заправлять кровати в таком порядке, чтобы не получить ни одного наряда.

4. В столовой в ряд поставлено 10 одинаковых стаканов, в каждом из которых налито некоторое (не обязательно равное) количество компота. Дежурный от скуки взял первый стакан и перелил оттуда во второй стакан столько компота, сколько туда вошло. Потом он перелили из второго стакана в третий столько компота, сколько туда вошло, и так далее до девятого стакана. Затем он взял десятый стакан и перелил из него в девятый стакан столько, сколько туда влезло, и так далее в обратном порядке. В конце концов оказалось, что ровно 4 стакана остались пустыми. Докажите, что в самом начале в первых 12 стаканах компота набралось бы не менее одного полного стакана.

5. Докажите, что существует число, которое при делении на числа 1, 2, …, 10 дает ровно 7 различных остатков.

6. У мастера имеется станок. Если положить туда доску в виде прямоугольника с длиной a и шириной b, то станок распилит её посередине, а затем переставит две половинки и склеит их так, что получится доска с длиной $2a$ и шириной $b/2$. Доказать, что, применив такую процедуру несколько раз, можно получить доску, у которой длинная сторона больше короткой не более чем в 2 раза (либо обе стороны равны).

7. 15 школьников писали олимпиаду, проходившую в два тура. Докажите, что их можно рассадить по комнатам таким образом, что любые два школьника во время хотя бы одного из туров сидели в комнатах с разным числом участников.

8. На знаменитой картине да Винчи "Стена плача" изображено n горизонтальных рядов по n одинаковых кирпичей, каждый ряд со сдвигом на полкирпича относительно предыдущего ряда (см. рис.). Сколько раз отрезок BC пересечет вертикальные и горизонтальные щелочки между кирпичами?