XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.2000

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Точки E и F таковы, что середина отрезка DE лежит на отрезке AB, середина отрезка DF лежит на отрезке BC и $\angle EDA = \angle FDC$. Середина отрезка EF – точка K – лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBK$.

2. На лист клетчатой бумаги положили 90 квадратиков размером в клетку так, что они целиком покрыли 90 клеток, образующих прямоугольник 9×10. Потом из тех же квадратиков сложили новую фигуру, целиком покрывающую 90 клеток. Оказалось, что любые два квадрата, которые имели общую сторону в прямоугольнике, остались соседями по стороне и в новой фигуре. Докажите, что новая фигура – тоже прямоугольник 9×10.

3. Докажите, что если $x^2 - x$ и $x^3 - x$ – натуральные числа, то число x – тоже натуральное.

4. Дано 5 натуральных чисел, не делящихся ни на 11, ни на 13. Докажите, что среди них найдутся два, сумма которых не делится ни на 11, ни на 13.

5. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что a^2+b-1 делится на b^2+a-1. Докажите, что число b^2+a-1 имеет хотя бы два различных простых делителя.

6. Назовем фигуру бисимметричной, если существуют такие две прямые, что для любой точки фигуры хотя бы одна из точек, симметричных ей относительно этих прямых, тоже принадлежит фигуре. Верно ли, что любой треугольник бисимметричен?

7. 11 неотрицательных чисел записали по кругу. Пусть A – произведение сумм пар соседних чисел, а B – произведение сумм четверок соседних чисел. Докажите, что $B \geq 2000A$.

8. Дана таблица 3×3, изображенная на рис. 1. Разрешается выбрать любой столбец или любую строку и умножить все числа, стоящие в этом столбце (этой строке) на любое число (хоть целое, хоть дробное). Можно ли несколькими такими операциями получить таблицу на рис. 2?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 1

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Рис. 2

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.2000

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ провели прямую l, пересекающую сторону BC. Докажите, что расстояние от точки D до прямой l равно сумме расстояний от точек B и C до этой же прямой.

2. На лист клетчатой бумаги положили 90 квадратиков размером в клетку так, что они целиком покрыли 90 клеток, образующих прямоугольник 9×10. Потом из тех же квадратиков сложили новую фигуру, целиком покрывающую 90 клеток. Оказалось, что любые два квадрата, которые имели общую сторону в прямоугольнике, остались соседями по стороне и в новой фигуре. Докажите, что новая фигура – тоже прямоугольник 9×10.

3. За круглым столом сидят 10 человек, занумерованных по часовой стрелке номерами от 1 до 10. Каждый из сидящих либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Первый сказал: «Мой сосед слева – лжец». Второй сказал: «Два моих соседа слева – лжецы». Третий сказал: «Три моих соседа слева – лжецы». ... Десятый сказал: «Десять моих соседей слева – лжецы». Сколько среди них могло быть лжецов?

4. Дано 4 натуральных числа, не делящиеся ни на 3, ни на 7. Обязательно ли среди них найдутся два, сумма которых не делится ни на 3, ни на 7?

5. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что a^2+b делится на b^2+a. Докажите, что число b^2+a – составное число.

6. Назовем фигуру бисимметричной, если существуют такие две прямые, что для любой точки фигуры хотя бы одна из точек, симметричных ей относительно этих прямых, тоже принадлежит фигуре. Верно ли, что любой треугольник бисимметричен?

7. Куб $3\times3\times3$ склеен из 27 одинаковых кубиков. Играют двое, ходят по очереди. Первый игрок первым ходом рассекает куб на две части, не разрезая маленьких кубиков. Второй делает то же с одной из полученных частей и т.д. Проигрывает тот, после хода которого впервые получится одиночный кубик. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?

8. В клетках доски 8×8 записаны числа от 1 до 8 как показано на рисунке справа. На доску поставили 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди них найдутся две, стоящие на одинаковых числах.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.2000

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Учительница дала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трех из четырех данных ей чисел. Докажите, что Катя ошиблась.

2. На лист клетчатой бумаги положили 90 квадратиков размером в клетку так, что они целиком покрыли 90 клеток, образующих прямоугольник 9×10. Потом из тех же квадратиков сложили новую фигуру, целиком покрывающую 90 клеток. Оказалось, что любые два квадрата, которые имели общую сторону в прямоугольнике, остались соседями по стороне и в новой фигуре. Докажите, что новая фигура – тоже прямоугольник 9×10.

3. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что a^2+b делится на b^2+a. Докажите, что число b^2+a – составное число.

4. Дано 4 натуральных числа, не делящиеся ни на 3, ни на 7. Обязательно ли среди них найдутся два, сумма которых не делится ни на 3, ни на 7?

5. За круглым столом сидят 10 человек, занумерованных по часовой стрелке номерами от 1 до 10. Каждый из сидящих либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Первый сказал: «Мой сосед слева – лжец». Второй сказал: «Два моих соседа слева – лжецы». Третий сказал: «Три моих соседа слева – лжецы». ... Десятый сказал: «Десять моих соседей слева – лжецы». Сколько среди них могло быть лжецов?

6. Петя записал пример на сложение, а потом заменил все цифры буквами (одинаковые – одинаковыми, различные – различными), причем четные цифры он заменял согласными буквами, а нечетные – гласными. У него получилось ТОБОЛ + ИШИМ = ИРТЫШ. Докажите, что он где-то ошибся.

7. Куб $3\times3\times3$ склеен из 27 одинаковых кубиков. Играют двое, ходят по очереди. Первый первым ходом рассекает куб на две части, не разрезая маленьких кубиков. Второй делает то же с одной из полученных частей и т.д. Проигрывает тот, после хода которого впервые получится одиночный кубик. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?

8. На планете Ялмез действует компьютерная сеть «Интерда». 75% ее пользователей – жители развитых стран. 30% ее пользователей живут в стране Лимонии. Является ли Лимония развитой страной? Ответ обоснуйте.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.11.2000

ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Учительница дала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трех из четырех данных ей чисел. Докажите, что Катя ошиблась.

2. На лист клетчатой бумаги положили 90 квадратиков размером в клетку так, что они целиком покрыли 90 клеток, образующих прямоугольник 9×10. Потом из тех же квадратиков сложили новую фигуру, целиком покрывающую 90 клеток. Оказалось, что любые два квадрата, которые имели общую сторону в прямоугольнике, остались соседями по стороне и в новой фигуре. Докажите, что новая фигура – тоже прямоугольник 9×10.

3. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что a^2+b делится на b^2+a. Докажите, что число b^2+a – составное число.

4. Дано 4 натуральных числа, не делящиеся ни на 3, ни на 7. Обязательно ли среди них найдутся два, сумма которых не делится ни на 3, ни на 7?

5. За круглым столом сидят 10 человек, занумерованных по часовой стрелке номерами от 1 до 10. Каждый из сидящих либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Первый сказал: «Мой сосед слева – лжец». Второй сказал: «Два моих соседа слева – лжецы». Третий сказал: «Три моих соседа слева – лжецы». ... Десятый сказал: «Десять моих соседей слева – лжецы». Сколько среди них могло быть лжецов?

6. Петя записал пример на сложение, а потом заменил все цифры буквами (одинаковые – одинаковыми, различные – различными), причем четные цифры он заменял согласными буквами, а нечетные – гласными. У него получилось ТОБОЛ + ИШИМ = ИРТЫШ. Докажите, что он где-то ошибся.

7. Куб $3\times3\times3$ склеен из 27 одинаковых кубиков. Играют двое, ходят по очереди. Первый первым ходом рассекает куб на две части, не разрезая маленьких кубиков. Второй делает то же с одной из полученных частей и т.д. Проигрывает тот, после хода которого впервые получится одиночный кубик. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?

8. На планете Ялмез действует компьютерная сеть «Интерда». 75% ее пользователей – жители развитых стран. 30% ее пользователей живут в стране Лимонии. Является ли Лимония развитой страной? Ответ обоснуйте.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.11.2000

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Имеется клетчатый прямоугольник размером 5×2001. Двое по очереди проводят по линиям сетки отрезки, соединяющие две стороны прямоугольника. Запрещается проводить отрезки по сторонам прямоугольника и проводить один отрезок дважды. Проигрывает тот, кто впервые ограничит единичный квадратик. Кто выиграет при правильной игре?

2. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нем произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

3. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

4. В вершинах правильного 2000-угольника расставлены положительные числа. Докажите, что найдется вершина, через которую нельзя провести прямую, не проходящую через другие вершины так, чтобы суммы чисел по обе стороны от этой прямой были равны.

5. Углы при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равны 20 градусам. D – основание биссектрисы угла C. Серединный перпендикуляр отрезка BC пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что $AD = BE$.

6. Найдутся ли такие 100 попарно различных натуральных чисел, что у любых двух различных наборов этих чисел – различные наибольшие общие делители?

7. На координатной плоскости расположены 100 точек. Докажите, что существует не более 2025 прямоугольников с вершинами в этих точках и со сторонами, параллельными осям.

8. Докажите, что для любого натурального n и любого x выполнено неравенство

$$|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+n| \geq \frac{n^2-1}{4}.$$

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.11.2000

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Имеется клетчатый прямоугольник размером 3×2000. Двое по очереди проводят по линиям сетки отрезки, соединяющие две стороны прямоугольника. Запрещается проводить отрезки по сторонам прямоугольника и проводить один отрезок дважды. Проигрывает тот, кто впервые ограничит единичный квадратик. Кто выиграет при правильной игре?

2. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нем произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

3. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

4. В вершинах правильного 2000-угольника расставлены натуральные числа. Докажите, что найдется вершина, через которую нельзя провести прямую, не проходящую через другие вершины так, чтобы суммы чисел по обе стороны от этой прямой были равны.

5. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и E такие, что $AD = BE$. Отрезки CD и AE пересекаются в точке O. Серединный перпендикуляр к отрезку CO пересекает прямую AO в точке K. Докажите, что BK и CO параллельны.

6. Докажите, что для любых чисел a и b найдутся такие числа x и y, не меньшие 0 и не большие 1, что $|xy+ax+by| \geq 1/3$.

7. Все натуральные числа от 1000 до 2000 выписаны подряд: 100010011002...19992000. Сколько раз в этом ряду после нечетной цифры идет четная?

8. Найдите все неотрицательные числа $x, y, z,$ такие, что $x^3 = 2y^2 - z$, $y^3 = 2z^2 - x$, $z^3 = 2x^2 - y$.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.11.2000

ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Имеется клетчатый прямоугольник размером 3×20. Двое по очереди проводят по линиям сетки отрезки, соединяющие две стороны прямоугольника. Запрещается проводить отрезки по сторонам прямоугольника и проводить один отрезок дважды. Проигрывает тот, кто впервые ограничит единичный квадратик. Кто выиграет при правильной игре?

2. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нем произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

3. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

4. Что больше:

$x = 1/(2+1/(3+1/(5+1/(6+1/(7+...+1/2000))...)))$ или $y = 1/(2+1/(3+1/(4+1/(6+1/(7+...+1/2000))...)))$?

5. Все натуральные числа от 1000 до 2000 выписаны подряд: 100010011002...19992000. Сколько раз в этом ряду после нечетной цифры идет четная?

6. Двое путников отправились одновременно в один и тот же путь. Первый половину расстояния проехал на телеге, а вторую - пешком. Второй половину затраченного времени шел пешком, а вторую половину ехал на телеге. Кто из них проделал весь путь быстрее, если пешком они ходят с одинаковой скоростью, а телега едет быстрее?

7. На рисунке справа изображён план минного поля. Из 36 его квадратов восемь заминированы, остальные свободны от мин. Все числа на рисунке вписаны в ***свободные от мин*** квадраты и показывают, сколько у этих квадратов заминированных соседей *(соседними считаются квадраты, примыкающие друг к другу по* ***вертикали, горизонтали или диагонали****)*. Найдите все заминированные поля.

		1	2		2
	1	1	3		
	2	1	3		
					1
		1			

8. Отметьте 4 вершины какого-нибудь многоугольника так, чтобы для любого целого числа n от 1 до 12 можно было указать две отмеченные вершины, между которыми лежат n сторон многоугольника.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.11.2000

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Имеется клетчатый прямоугольник размером 3×20. Двое по очереди проводят по линиям сетки отрезки, соединяющие две стороны прямоугольника. Запрещается проводить отрезки по сторонам прямоугольника и проводить один отрезок дважды. Проигрывает тот, кто впервые ограничит единичный квадратик. Кто выиграет при правильной игре?

2. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нем произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

3. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

4. Что больше:

$x = 1/(2+1/(3+1/(5+1/(6+1/(7+...+1/2000))...)))$ или $y = 1/(2+1/(3+1/(4+1/(6+1/(7+...+1/2000))...)))$?

5. Все натуральные числа от 1000 до 2000 выписаны подряд: 100010011002...19992000. Сколько раз в этом ряду после нечетной цифры идет четная?

6. Двое путников отправились одновременно в один и тот же путь. Первый половину расстояния проехал на телеге, а вторую - пешком. Второй половину затраченного времени шел пешком, а вторую половину ехал на телеге. Кто из них проделал весь путь быстрее, если пешком они ходят с одинаковой скоростью, а телега едет быстрее?

7. На рисунке справа изображён план минного поля. Из 36 его квадратов восемь заминированы, остальные свободны от мин. Все числа на рисунке вписаны в ***свободные от мин*** квадраты и показывают, сколько у этих квадратов заминированных соседей *(соседними считаются квадраты, примыкающие друг к другу по* ***вертикали, горизонтали или диагонали****)*. Найдите все заминированные поля.

		1	2		2
	1	1	3		
	2	1	3		
					1
		1			

8. Отметьте 4 вершины какого-нибудь многоугольника так, чтобы для любого целого числа n от 1 до 12 можно было указать две отмеченные вершины, между которыми лежат n сторон многоугольника.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.2000

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Какое наименьшее количество шашек достаточно расставить по черным клеткам шахматной доски 8×8 так, чтобы никакие две шашки не стояли рядом по диагонали, но при добавлении еще одной шашки (в произвольную из оставшихся свободными черных клеток) такая пара появлялась?

2. Число, большее 10, является произведением степени тройки на степень семерки. Докажите, что в его десятичной записи есть хотя бы одна четная цифра.

3. В равнобедренном треугольнике проведены биссектрисы тупого и острого углов. Оказалось, что одна из них вдвое больше другой. Найдите углы этого треугольника.

4. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов, причем количество ключей разных видов различно. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах, так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев имеет дубликат ключа от одной из комнат. Докажите, что он может открыть все комнаты.

5. Неотрицательные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 таковы, что $a_1 = a_7 = 0$. Докажите, что найдется такое i ($2\le i\le 6$), что $a_{i-1} + a_{i+1} \le \sqrt{3}\cdot a_i$.

6. Докажите, что уравнение $2x^4+y+z = y^2+z^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

7. Внутри квадрата 1×1 с единичными скоростями летают два точечных шарика. Между собой они никак не взаимодействуют, а от стенок отскакивают по закону “угол падения равен углу отражения”. Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что ни его, ни паутинку за время спуска шарики не заденут.

8. Пусть M и N – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что серединные перпендикуляры к MN, AC и BD пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB=CD$.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.2000

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На циферблате есть минутная и часовая стрелки. Назовем положение стрелок *равноправным*, если можно поменять местами часовую и минутную стрелки и часы будут показывать реальное время. Найдите количество равноправных положений на циферблате.

2. Число, большее 10, является произведением степени тройки на степень семерки. Докажите, что в его десятичной записи есть хотя бы одна четная цифра.

3. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы черные не били никого по вертикали, а белые – по горизонтали?

4. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев знает, где какой ключ лежит. Докажите, что сторож Сергеев может заранее сделать дубликаты ключей двух кабинетов, с помощью которых можно открыть все комнаты.

5. На плоскости отмечены 8 точек – все вершины и середины сторон некоторого квадрата. Сколько существует прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?

6. В комнате находилось несколько человек, причем о каждом известно, что он либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Они по очереди выходили из комнаты, перед выходом говоря: “Сейчас в комнате ровно 10 лжецов”. Через некоторое время комната опустела. Сколько человек могло находиться в комнате?

7. Внутри квадрата 1×1 с единичными скоростями летают два точечных шарика. Между собой они никак не взаимодействуют, а от стенок отскакивают по закону “угол падения равен углу отражения”. Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что ни его, ни паутинку за время спуска шарики не заденут.

8. Пусть M и N – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что серединные перпендикуляры к MN, AC и BD пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB=CD$.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.2000

ВТОРАЯ ЛИГА

1. В комнате находилось несколько человек, причем о каждом известно, что он либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Они по очереди выходили из комнаты, перед выходом говоря: “Сейчас в комнате ровно 10 лжецов”. Через некоторое время комната опустела. Сколько человек могло находиться в комнате?

2. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы черные не били никого по вертикали, а белые – по горизонтали?

3. На плоскости отмечены 8 точек – все вершины и середины сторон некоторого квадрата. Сколько существует прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 4 разных видов. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев знает, где какой ключ лежит. Докажите, что сторож Сергеев может сделать дубликаты ключей двух кабинетов, с помощью которых можно открыть все комнаты.

5. В марте 1532 года скупой рыцарь каждый день спускался в свой подвал и добавлял в (почти уже полный) сундук от 1 до 10 монет. После этого он каждый раз подсчитывал монеты и оказывалось, что число монет в сундуке делится без остатка либо на 22, либо на 25 (но не на оба этих числа сразу). Докажите, что рыцарь потерял счет своим сокровищам.

6. В начале дискотеки у Димы и Юры было поровну семечек. Дима сгрыз в 8 раз меньше семечек, чем Юра, а осталось у него в 9 раз больше семечек, чем у Юры. Докажите, что изначально общее количество семечек делилось на 142.

7. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону. Когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист был в 6 км от них. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. Насколько велосипедист был впереди пешехода в момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

8. Внутри квадрата 1×1 с единичными скоростями, отражаясь от стенок, летают два точечных шарика, каждый на своей высоте. Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что ни его, ни паутинку за время спуска шарики не заденут.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.11.2000

ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В комнате находилось несколько человек, причем о каждом известно, что он либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Они по очереди выходили из комнаты, перед выходом говоря: “Сейчас в комнате ровно 10 лжецов”. Через некоторое время комната опустела. Сколько человек могло находиться в комнате?

2. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы черные не били никого по вертикали, а белые – по горизонтали?

3. На плоскости отмечены 8 точек – все вершины и середины сторон некоторого квадрата. Сколько существует прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 4 разных видов. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев знает, где какой ключ лежит. Докажите, что сторож Сергеев может сделать дубликаты ключей двух кабинетов, с помощью которых можно открыть все комнаты.

5. В марте 1532 года скупой рыцарь каждый день спускался в свой подвал и добавлял в (почти уже полный) сундук от 1 до 10 монет. После этого он каждый раз подсчитывал монеты и оказывалось, что число монет в сундуке делится без остатка либо на 22, либо на 25 (но не на оба этих числа сразу). Докажите, что рыцарь потерял счет своим сокровищам.

6. В начале дискотеки у Димы и Юры было поровну семечек. Дима сгрыз в 8 раз меньше семечек, чем Юра, а осталось у него в 9 раз больше семечек, чем у Юры. Докажите, что изначально общее количество семечек делилось на 142.

7. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону. Когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист был в 6 км от них. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. Насколько велосипедист был впереди пешехода в момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

8. Внутри квадрата 1×1 с единичными скоростями, отражаясь от стенок, летают два точечных шарика, каждый на своей высоте. Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что ни его, ни паутинку за время спуска шарики не заденут.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.11.2000

ВЫСШАЯ ЛИГА
Финальные бои за 1-4 места

1. На плоскости лежат несколько одинаковых параллельно расположенных квадратов. Всегда ли можно отметить на плоскости несколько точек так, чтобы любой из этих квадратов содержал ровно одну отмеченную точку? (Граница квадрата принадлежит квадрату.)

2. На поле 1×2000 играют двое, вписывая по очереди А или Г в свободную клетку (каждый игрок любым ходом пишет любую из букв). Выигрывает тот, после чьего хода найдутся три клетки подряд со словом АГА. Докажите, что второй может выиграть независимо от действий первого.

3. Таблица $n\times n$ заполнена числами 0, 1, –1 так, что в каждой строке и каждом столбце есть ровно по одной 1 и по одной –1. Докажите, что можно так переставить строки и столбцы, чтобы +1 и –1 поменялись местами.

4. На сторонах треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AKB, BLC и AMC с равными углами при вершинах K, L и M. При этом треугольники AKB и BLC построены наружу, а точка M оказалась внутри треугольника ABC. Докажите, что $KBLM$ – параллелограмм.

5.. Равносторонний треугольник со стороной 9 разбит на 81 равный треугольник отрезками, параллельными сторонам. Докажите, что из него нельзя вырезать более 18 параллелограммов со сторонами 1 и 2, каждый из которых составлен из четырех треугольников.

6. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n$–4, $3n$–8 или 8–n. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10 000 000, но меньшее 10 000 020?

7. Докажите, что если $2<a, b, c, d<4$, то $9(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geq 25(ac-bd)^2$.

8. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных собственных делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.11.2000

ВЫСШАЯ ЛИГА
Финальные бои за 5-8 места

1. На прямой расположено несколько отрезков таким образом, что из любых трех отрезков какие-то два имеют общую точку. Докажите, что можно отметить две точки так, чтобы на каждом отрезке оказалась хотя бы одна отмеченная точка (концы отрезка – точки отрезка).

2. На поле 1×2000 играют двое, вписывая по очереди А или Г в свободную клетку (каждый игрок любым ходом пишет любую из букв). Выигрывает тот, после чьего хода найдутся три клетки подряд со словом АГА. Докажите, что второй может выиграть независимо от действий первого.

3. Таблица $n\times n$ заполнена числами 0, 1, –1 так, что в каждой строке и каждом столбце есть ровно по одной 1 и по одной –1. Докажите, что можно так переставить строки и столбцы, чтобы +1 и –1 поменялись местами.

4. На сторонах треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AKB, BLC и AMC с равными углами при вершинах K, L и M. При этом, треугольники AKB и BLC построены наружу, а точка M оказалась внутри треугольника ABC. Докажите, что $KBLM$ – параллелограмм.

5.. Равносторонний треугольник со стороной 9 разбит на 81 равный треугольник отрезками, параллельными сторонам. Докажите, что из него нельзя вырезать более 18 параллелограммов со сторонами 1 и 2, каждый из которых составлен из четырех треугольников.

6. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n$–4, $3n$–8 или 8–n. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10 000 000, но меньшее 10 000 020?

7. Решите в натуральных числах систему уравнений:

$$\text{НОД}(x,y)+x=2000,\ \text{НОК}(x,y)+2y=2001.$$

8. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных собственных делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны.

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.11.2000

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На прямой расположено несколько отрезков таким образом, что из любых трех отрезков какие-то два имеют общую точку. Докажите, что можно отметить две точки так, чтобы на каждом отрезке оказалась хотя бы одна отмеченная точка (концы отрезка – точки отрезка).

2. Найдите все простые p и q, для которых уравнение $x^4 + q = px^3$ имеет целый корень.

3. На клетчатой доске размером 100×100 двое поочередно расставляют цифры: первый – единицы, второй – нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы одна из сумм нечетна – победил первый игрок, в противном случае – второй. Кто выиграет при правильной игре?

4. На сторонах треугольника ABC наружу построены как на основаниях равнобедренные треугольники AKB и BLC с равными углами при вершинах K и L. Точка M такова, что $KBLM$ – параллелограмм. Докажите, что $MA=MC$.

5. Равносторонний треугольник со стороной 9 разбит на 81 равный треугольник отрезками, параллельными сторонам. Докажите, что из него нельзя вырезать более 18 параллелограммов со сторонами 1 и 2, каждый из которых составлен из четырех треугольников.

6. Решите в натуральных числах систему уравнений:

$$\text{НОД}(x,y) + x = 2000,\ \text{НОК}(x,y) + 2y = 2001.$$

7. **С**уществует ли 20-значное число n, в десятичной записи которого нет нулей, а сумма его цифр равна сумме цифр числа $1999n$?

8. Докажите, что если $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, то

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

XVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ.
ТОБОЛЬСК, 30.10–05.11.2000

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.11.2000

ФИНАЛЬНЫЕ ИГРЫ ВТОРОЙ И ЮНИОРСКОЙ ЛИГ

1.. В комнате находятся 10 человек. Каждый из них либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Один из них сказал: «Среди нас есть хотя бы один лжец». Второй сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 2». Третий сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 3». ... Десятый сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 10». Сколько лжецов может быть в комнате? Найдите все возможности и докажите, что других возможностей нет.

2. На доске написано три двузначных числа, одно из которых начинается на 5, второе – на 6, а третье – на 7. Учитель попросил трех учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. У первого ученика получилось 147, ответы второго и третьего – различные трехзначные числа, начинающиеся на 12. Как такое могло быть?

3. Двое по очереди проводят на плоскости прямые линии, причем запрещается проводить одну прямую дважды и проводить прямую через точку пересечения уже проведенных прямых. Проигрывает тот, после хода которого число точек пересечения проведенных прямых впервые станет большим или равным 5. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто проводит первую прямую, или его партнер?

4. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число n, в десятичной записи которого нет нулей, а сумма его цифр равна сумме цифр числа $1999n$.

5. Равносторонний треугольник со стороной 9 разбит на 81 равный треугольник отрезками, параллельными сторонам. Докажите, что из него нельзя вырезать более 18 параллелограммов со сторонами 1 и 2, каждый из которых составлен из четырех треугольников.

6. Решите в натуральных числах систему уравнений: $\text{НОД}(x,y) + x = 2000$, $\text{НОК}(x,y) + 2y = 2001$.

7. На прямой лежат несколько отрезков единичной длины. Докажите, что на прямой можно отметить несколько точек таким образом, чтобы на каждом отрезке была отмечена ровно одна точка (концы отрезка принадлежат отрезку).

8. Путешественник прилетел в столицу Лимонии. Затем он определил самый удаленный от столицы город и отправился туда. Потом опять определил самый удаленный от себя город и переехал в него. Так он переезжал по Лимонии 101 раз. Каждый раз самый удаленный город определялся однозначно. Мог ли путешественник оказаться в конце путешествия в столице?