Часть 27. Делимость

27.1. Сколькими нулями оканчивается число: а) 24!; б) 100!; в) 2010!?

27.2. Докажите признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11.

27.3. а) Может ли быть точным квадратом целое число, десятичная запись числа состоит из нулей и единиц, причём единиц ровно 300?

б) У числа 2^{2010} вычислили сумму цифр; у полученного числа снова вычислили сумму цифр и так далее до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое число получилось?

в)* Может ли сумма цифр точного квадрата быть равной 2010?

27.4. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

27.5. Пусть n — любое целое число. Докажите следующие утверждения: а) $n(n+1)(n+2)$ делится на 6; б) n^3+5n делится на 6; в) n^5-n делится на 30; г) $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24.

27.6. Пусть n — любое натуральное число. Докажите следующие утверждения: а) $10^n+18n-1$ делится на 27; б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133; в) $3^{2n+2}+8n-9$ делится на 16; г) $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1}.

27.7. а) Докажите, что сумма кубов любых трёх последовательных целых чисел делится на 9.

б) Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть квадратом целого числа.

в)* Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел (например: $13=3^3+(-2)^3+(-2)^3+1^3+1^3$).

27.8. а) Пусть n — натуральное число. Докажите, что из любых $n+1$ натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на n.

б) В строку выписано n целых чисел. Докажите, что либо одно из них делится на n, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на n.

в) Докажите, что существует натуральное число, делящееся на 2010, в десятичной записи которого участвуют только нули иединицы.

г) Докажите, что существует степень числа 29, оканчивающаяся цифрами 00001.

27.9. Докажите, что выражение ax^2+bx+c принимает целые значения при всех целых x тогда и только тогда, когда числа $2a$, $a+b$ и c — целые.

27.10. а) Пусть p — простое число, $p>3$. Докажите, что p^2-1 делится на 24.

б) Пусть p — простое число, $p>5$. Докажите, что либо p^2-1, либо p^2-19 делится на 30.

в) Пусть p — простое число, $p>5$. Докажите, что p^4-50p^2+49 делится на 2880.

27.11. а) Докажите, что квадрат целого числа при делении на 3 в остатке не может давать 2.

б) Докажите что квадрат целого числа при делении на 4 даёт в остатке 0 или 1.

в) Докажите что сумма квадратов целых чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 3.

г) Докажите что сумма квадратов целых чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 7.

27.12. а) Докажите, что ни при каком натуральном n числа $3n-1$, $5n\pm 2$, $7n+3$, $7n-1$, $7n-2$ не могут быть точными квадратами. б)* Докажите, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из n одинаковых цифр ($n>1$), не может быть точным квадратом.

27.13. а) Докажите, что число $11^{10}-1$ делится на 100. б) Докажите, что число $2^{35}+1$ делится на 11.

в) Докажите, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

27.14. Найдите натуральное число p, если известно, что следующие числа простые:
а) p, $p+10$, $p+14$; б) p, $p+4$, $p+14$; в) p, $8p^2+1$; г) p, $2p+1$, $4p+1$; д) p, p^2+4, p^2+6.

27.15. Сумма трёх целых положительных чисел больше, чем их произведение, а сумма двух из этих чисел равна 33. Найдите все такие числа.

27.16. Сумма квадратов четырёх целых положительных чисел больше, чем половина квадрата их произведения, а сумма первых степеней этих чисел равна 42. Найдите все такие числа.

27.17. а) При каких целых значениях n выражение $\dfrac{n^2-n+1}{n-2}$ равно целому числу?

б) Сократима ли дробь $\dfrac{n+3}{2n+7}$ хотя бы при одном целом значении n?

в) Докажите, что дробь $\dfrac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ несократима ни при каком целом a.

27.18. Решите в целых числах уравнения:
1) $5x-2y=3$; 2) $2010x-1827y=12345678910$; 3) $7x+29y=11$; 4) $3^x+8=y^2$; 5) $2^x-1=5^y$; 6) $x^2-y^2=3$; 7) $x^2-9y^2=7$; 8) $x^2+xy-6y^2=6$; 9) $x+y=xy$; 10) $1+x+x^2+x^3=2^y$; 11) $15x^2y^2-8yx^2+28y^2x+x^2+5y^2-38xy+8x-24y+16=0$; 12) $14x^4-5y^4-3x^2y^2+82y^2-125x^2+51=0$; 13) $18(x-1)^2=225-y^2-6y^2z^2$; 14) $x^2+y^2+z^2=2xyz$; 15) $x^2+y^2+z^2+v^2=2xyzv$; 16) $2x^3+xy-7=0$; 17) $5x^2+y^2+3z^2-2yz=30$; 18) $3x^2+6xy+2y^2=7$.

27.19. Решите в натуральных числах уравнения:
1) $2x^2-2xy+x+3y=36$; 2) $3xy+3yz+3xz=5xyz+3$; 3) $xz+4y=yx^2+z^2y$; 4) $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$; 5) $\log_x(y-7)+\log_y(5x-17)=1$; 6) $2^x-3^y=1$; 7) $y^x=x^y$.

27.20. а) Натуральные числа a, b и c, среди которых нет равных, удовлетворяют условию $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{5}{6}$. Найдите все такие числа. б) Сумма обратных величин трёх натуральных чисел равна 1. Каковы эти числа?