

Часть 18. Применение формул тригонометрии

- 18.1.** В треугольнике ABC угол ABC равен α , угол BCA равен 2α . Окружность, проходящая через точки A , C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M . Найдите отношение AM к AB .
- 18.2.** В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?
- 18.3.** Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.
- 18.4.** Точки K , L , M , N , P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .
- 18.5.** Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырёхугольника $ABDE$. Найдите хорду DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45^\circ$.
- 18.6.** В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC . Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC .
- 18.7.** Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите биссектрису AD .
- 18.8.** В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найдите радиус окружности.
- 18.9.** На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B . Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB . Найдите площадь треугольника ABC , где C — точка пересечения этих касательных.
- 18.10.** Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение которых равно $1 + \sqrt{2}$, считая от вершины. Найдите острые углы треугольника.
- 18.11.** Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.
- 18.12.** В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC:AB = 3:2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB . Найдите косинус угла ACB .
- 18.13.** На окружности радиуса 12 с центром в точке O лежат точки A и B . Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K , а стороны BC — в точке H . Расстояние от точки M до прямой KH равно 3. Найдите величину угла AOB .
- 18.14.** Биссектриса AE угла A пересекает четырёхугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD , в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE . Найдите отношение периметров этих треугольников.
- 18.15.** В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C , центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.
- 18.16.** Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причём $AC = BC$. На прямой AB взята точка D , удалённая от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC .
- 18.17.** Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите углы трапеции.
- 18.18.** В прямоугольном треугольнике ABC из точки E , расположенной в середине катета BC , опущен перпендикуляр EL на гипотенузу AB . Найдите углы треугольника ABC , если $AE = \sqrt{10}EL$ и $BC > AC$.
- 18.19.** Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $AC:A_1C_1 = 5:\sqrt{3}$. Вершины A_1 и B_1 расположены соответственно на сторонах AC и BC , а вершина C_1 — на продолжении стороны AB за точку B , причём A_1B_1 перпендикулярно BC . Найдите угол ABC .
- 18.20.** В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD ; длины сторон равны: $AB = 1$, $CD = 4$, $AD = 5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA . В каком отношении точка M делит сторону AD ?
- 18.21.** Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$. Найдите площадь этого треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.
- 18.22.** В остроугольном треугольнике ABC высота AD , медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O . Найдите $\angle C$, если $OE = 2OC$.
- 18.23.** Высоты равнобедренного остроугольного треугольника, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $AO = 5$, а высота AD равна 8.
- 18.24.** В круге проведены два перпендикулярных диаметра AE и BF . На дуге EF взята точка C . Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE в точках P и Q соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга.
- 18.25.** Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.
- 18.26.** На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD , имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневыписанная окружность треугольника ACD). Докажите, что этот радиус равен четверти высоты треугольника, опущенной на её боковую сторону.
- 18.27.** Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие внешние касательные. Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина — на другой, а каждая из боковых сторон касается одной из данных окружностей. Докажите, что высота треугольника равна сумме радиусов окружностей.