

Часть 13. Подобные треугольники

13.1. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия, а отношение площадей — квадрату коэффициента подобия.

13.2. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника.

13.3°. Докажите, что прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две другие его стороны (или их продолжения), образует с этими сторонами треугольник, подобный данному.

13.4°. Сторона AB треугольника ABC разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC . Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри треугольника, если $BC = 12$.

13.5. На стороне AC треугольника ABC отложен отрезок AM , равный третьей части стороны AB , а на стороне AB — отрезок AN , равный третьей части стороны AC . Найдите MN , если $BC = 15$.

13.6. Через точку L на стороне BC треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие эти стороны соответственно в точках K и M . Известно, что $BL:LC = 1:3$, $AB = 12$ и $AC = 18$. Найдите стороны четырёхугольника $AKLM$.

13.7°. Стороны AB и AC треугольника ABC разделены точками M и N в отношении $2:3$, считая от точки A . Докажите, что $MN \parallel BC$ и найдите MN , если $BC = 20$.

13.8°. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Докажите, что треугольники AOD и COB подобны и найдите коэффициент подобия, если $AD = a$ и $BC = b$.

13.9. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение, в котором отрезок AM делит диагональ BD .

13.10. Точка K лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$, причём $BK:KD = 1:4$. В каком отношении прямая AK делит сторону BC ?

13.11. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B . Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ , которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.

13.12. Точка M лежит на боковой стороне AB трапеции $ABCD$, причём $AM:MB = 1:2$. Прямая, проходящая через точку M параллельно основаниям AD и BC , пересекает боковую сторону CD в точке N . Найдите MN , если $AD = a$ и $BC = b$.

13.13°. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей, и через третью точку деления (считая от вершины меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключённый между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b .

13.14. Основание треугольника равно $3b$. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

13.15. Через точки, делящие сторону треугольника на три равные части, проведены прямые, параллельные другой стороне треугольника. Найдите площадь четырёхугольника, заключённого между этими прямыми, если площадь треугольника равна 24 .

13.16. Точка M лежит на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC , причём $BM = BC$. Найдите MC , если $BC = 1$ и $AB = 2$.

13.17°. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

13.18°. В треугольнике ABC точка K на медиане AM расположена так, что $AK:KM = 1:3$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне AC , делит сторону BC .

13.19. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8 , вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

13.20. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

13.21. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

13.22°. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB = DN:NC = m:n$. Найдите MN , если основания AD и BC трапеции равны соответственно a и b .

13.23°. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK:KC = DL:LB = k:l$. Найдите KL , если основания AD и BC трапеции равны a и b соответственно.

13.24. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проходит прямая, пересекающая стороны AB и AC . Расстояния от вершин B и C до этой прямой равны a и b соответственно. Найдите расстояние от вершины A до этой прямой.

13.25. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, площадь которого равна 28 , пересекаются в точке O . Через середины отрезков BO и DO проведены прямые, параллельные диагонали AC . Найдите площадь части четырёхугольника, заключённой между этими прямыми.

13.26°. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок с концами на AB и AC , параллельный стороне BC .

13.27°. а) *Замечательное свойство трапеции.* Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

б) Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, проходит через точку пересечения диагоналей. Верно ли, что эти стороны параллельны?

13.28°. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

13.29°. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции.

13.30. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключённый внутри трапеции, делился бы её диагоналями на три равные части.

13.31. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок этой прямой, ограниченный продолжениями диагоналей, если основания трапеции равны a и b .

13.32. а) Даны отрезки a , b и c . Постройте такой отрезок x , что $x:a = b:c$.

б) Даны отрезки a , b , c , d и e . Постройте отрезок, равный $\frac{abc}{de}$.

13.33. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключённый внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

13.34. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 12 и 18 и пересекаются в точке O . Найдите стороны четырёхугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB , BOC , COD и AOD .

13.35°. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C , а треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C .

13.36. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Найдите B_1C_1 , если $\angle A = 60^\circ$ и $BC = 6$.

13.37. В треугольнике ABC провели две высоты AL и BM , причём точки L и M оказались лежащими на сторонах BC и AC соответственно. Затем провели прямую LM до пересечения с продолжением стороны AB . Какое наибольшее число пар подобных треугольников можно насчитать на этом чертеже, если на нём не образовалось ни одной пары равных треугольников?

13.38. Пусть M и N — проекции вершины A параллелограмма $ABCD$ на прямые BC и CD соответственно. Докажите, что треугольник MAN подобен треугольнику ABC .

13.39. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O . Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

13.40. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC делят параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN , если $BD = d$.

13.41. Дан выпуклый четырёхугольник площади S . Внутри него выбирается точка и отображается симметрично относительно середин его сторон. Получаются четыре вершины нового четырёхугольника. Найдите его площадь.

13.42. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2 .

13.43°. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

13.44. Площадь трапеции равна 27, основания 8 и 16. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

13.45. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC , причём $\angle MAB = \angle ACB$. Найдите AM , если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

13.46. В треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC , вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB . Найдите сторону ромба, если $BC = 12$, $AC = 6$.

13.47. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Докажите, что три большие диагонали шестиугольника с вершинами в точках деления пересекаются в одной точке.

13.48. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

13.49°. Площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC .

13.50. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n , считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите отрезки касательных, заключённые между сторонами треугольника.

13.51°. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC , причём $AK:KB = 3:2$, $BM:MC = 3:1$. Через точку B проведена прямая l , параллельная AC . Прямая KM пересекает прямую l в точке P , а прямую AC в точке N . Найдите BP и CN , если $AC = a$.

13.52°. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$. Точка K — середина стороны AB . В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

13.53. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = 3AC$. Точка K лежит на стороне AB , причём $AK:KB = 1:3$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

13.54. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2CN$. Точка M лежит на стороне BC , причём $BM:MC = 1:3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ?

13.55. Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC , причём $BK:KA = 1:4$, $BM:MC = 3:2$. Прямая MK пересекает продолжение стороны AC в точке N . Найдите $AC:CN$.

13.56°. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$, причём $AM:MB = 1:2$, $AN:ND = 3:2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K . Найдите отношения $DK:KM$, $CK:KN$.

13.57. Точка P лежит на стороне AB треугольника ABC , причём $AP:PB = 1:2$. Отрезок CP пересекает медиану AD в точке M . Найдите отношения $AM:MD$, $CM:MP$.

13.58°. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC . Отрезки AK и CE пересекаются в точке M . В каком отношении прямая BM делит сторону AC , если $BK:KC = 1:2$, $AE:EB = 2:3$?

13.59. На медиане AD треугольника ABC взята точка M , причём $AM:MD = 1:3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC ?

13.60°. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

13.61. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке M . Докажите, что $BM:MC = AB:AC$.

13.62°. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $BD:AB = DC:AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC .

13.63°. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C ?

13.64. а) В треугольнике ABC сторона AC равна b , сторона AB равна c , а биссектриса угла A пересекается со стороной BC в точке D , такой, что $DA = DB$. Найдите сторону BC .

б) Для сторон треугольника ABC выполняется равенство $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$.

13.65. Прямая, параллельная основаниям трапеции, равным a и b , разбивает её на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключённый внутри трапеции.

13.66°. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a , отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b . Найдите диаметр окружности.

13.67. Точка пересечения медиан треугольника ABC , вершина A и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности. Найдите медиану, проведённую из вершины A , если $BC = a$.

13.68. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB . Отрезок этой касательной, заключённый между сторонами AC и CB , равен 1. Найдите сторону AB .

13.69. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 . Найдите площадь данного треугольника.

13.70. Каждая сторона треугольника поделена на три равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S .

13.71. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M , что $CM = 2,4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

13.72°. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AC_1:C_1B = BA_1:A_1C = CB_1:B_1A = 2:1$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.

13.73. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K и L , причём $AM:MB = CK:KD = 1:2$, а $BN:NC = DL:LA = 1:3$. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого — пересечения отрезков AN, BK, CL и DM , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

13.74. Через точку K , данную на стороне AB треугольника ABC , проведите прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника ABC пополам.

13.75. В треугольнике со сторонами a, b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

13.76. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F . Известно, что $S_{\triangle DEF} = 5$. Найдите $S_{\triangle ABC}$.

13.77. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , а $S_{\triangle ODC} = \sqrt{S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD}}$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

13.78. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью одной линейки:

- разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них;
- проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1 ;
- удвойте отрезок, расположенный на одной из них.

13.79. Равны ли треугольники по двум сторонам и трём углам?

13.80. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E . Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырёхугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найдите сторону BC .

13.81. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1, B_1 и A_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O , причём $\frac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

13.82°. Теорема Менелая. Дан треугольник ABC . Точки A_1, C_1 и B_1 лежат на прямых соответственно BC, AB и AC . Докажите, что эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = -1$.

13.83°. Теорема Чевы. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам BC, AC и AB треугольника ABC . Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

13.84. С помощью теоремы Чевы докажите, что в одной точке пересекаются: а) медианы треугольника; б) биссектрисы треугольника; в) отрезки соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная

окружность касается противоположных сторон треугольника (*точка Жергонна*); г) отрезки соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вневписанные окружности касается противоположных сторон треугольника (*точка Нагеля*).

13.85. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

13.86. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .

13.87. Сторона неравностороннего треугольника равна среднему арифметическому двух других сторон. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис треугольника, параллельна этой стороне.

13.88°. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.

13.89. Даны точки A и B . С помощью одного циркуля постройте середину отрезка AB .

13.90. Через центр O окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P , и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q . Найдите BP , если известны стороны треугольника $AB = c$, $BC = a$, а $BQ = p$.

13.91. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трём высотам.

13.92. Найдите расстояние от вершины A вписанного пятиугольника $ABCDE$ до прямой BE , если расстояния от A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a , b , c .

13.93. Все стороны выпуклого четырёхугольника площади 1 разделены на три равные части. Отрезки, соединяющие соответствующие точки деления на противоположных сторонах, разбивают четырёхугольник на девять четырёхугольников. Найдите площадь внутреннего четырёхугольника разбиения.

13.94. *Лемма биссектрального треугольника.* В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC .

13.95. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 ; B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольник $A_1B_2C_2$ подобен треугольнику ABC .

13.96. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Докажите, что середина отрезка PQ и середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*).

13.97. *Теорема Птолемея.* Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений двух пар его противоположных сторон равна произведению его диагоналей.