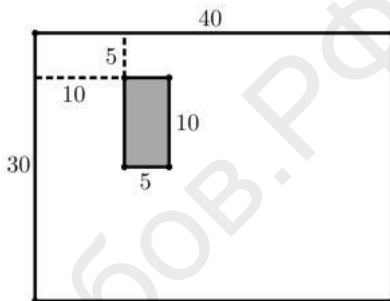


Начинающие

- На рисунке изображен лист бумаги размером 40×30 , внутри которого закрашен серый прямоугольник размером 10×5 . Мы хотим вырезать серый прямоугольник из листа, используя четыре прямолинейных разреза. Каждым таким разрезом мы режем кусок бумаги от края до края, оставляем себе только часть, содержащую серый прямоугольник, и продолжаем резать уже её. Наша задача состоит в том, чтобы суммарная длина разрезов была как можно меньше. Как достичь этой цели, и какова минимальная суммарная длина разрезов? Укажите соответствующие разрезы и напишите их суммарную длину. Обосновывать ответ не нужно.



- Выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежит внутри выпуклого шестиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, причем

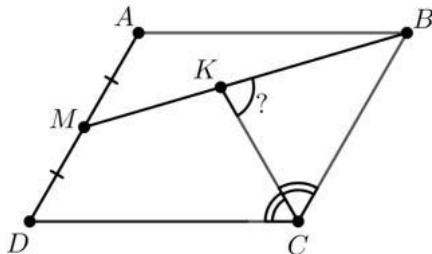
$$A_1A_2 \parallel B_1B_2, A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots, A_6A_1 \parallel B_6B_1.$$

Оказалось, что каждый из шестиугольников $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ и $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ является несамопересекающимся. Докажите, что их площади равны.

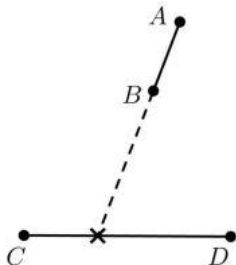
- На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$. Известно, что

$$\angle D = 60^\circ, AD = 2, AB = \sqrt{3} + 1.$$

Точка M — середина отрезка AD . Отрезок CK является биссектрисой угла C . Найдите величину угла CKB .



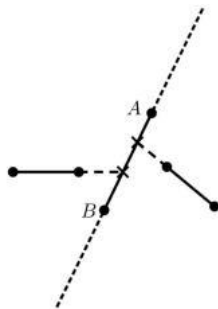
4. На плоскости расположена окружность ω . Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются ω и лежат внутри неё. Хорда AB окружности ω касается обеих окружностей, причем окружности лежат по разные стороны относительно хорды. Докажите, что $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90^\circ$.
5. На плоскости расположено несколько попарно непересекающихся отрезков (отрезки не пересекаются даже в вершинах). Будем говорить, что отрезок AB *разбивает* отрезок CD , если продолжение отрезка AB пересекает отрезок CD в некоторой точке, отличной от точек C и D .



- (a) Возможно ли такое расположение отрезков, что каждый отрезок, продолженный в обе стороны, разбивает ровно один отрезок с каждой из сторон?



- (b) Назовем отрезок *окружённным*, если в каждой полуплоскости относительно него найдётся ровно один отрезок, который его разбивает (например, отрезок AB на рисунке является окружённным). Возможно ли такое расположение отрезков, при котором каждый отрезок окружён?

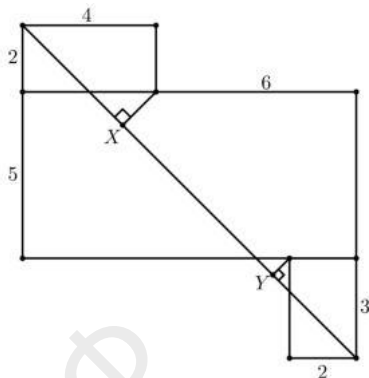


Продолжительность олимпиады — 240 минут.

Публикация условий и решений в интернете запрещена до их размещения на официальном сайте олимпиады igo-official.ir.

Продолжающие

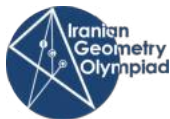
1. Фигура на рисунке состоит из трех прямоугольников. Возле некоторых из отрезков подписаны их длины. Найдите длину отрезка XU .



2. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Известно, что $\angle DAC = 90^\circ$ и $2\angle ADB = \angle ACB$. Докажите, что если $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ$, то $2AP = BP$.
3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B . Прямая O_1B вторично пересекает окружность ω_2 в точке C , прямая O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке D . Пусть X — вторая точка пересечения AC и ω_1 , а Y — вторая точка пересечения BD и ω_2 . Докажите, что $CX = DY$.
4. Дан многогранник с треугольными гранями. Пусть P — произвольная точка, лежащая на его ребре, причем P не совпадает ни с серединой, ни с концами этого ребра. Положим $P_0 = P$. На каждом шаге точка P_i соединяется с центром масс одной из двух граней, содержащих точку P_i . Через P_{i+1} обозначим вторую точку пересечения полученной прямой с границей этой грани. Продолжим этот процесс для точки P_{i+1} и другой грани, содержащей P_{i+1} . Докажите, что, действуя подобным образом, пересечь все грани многогранника не удастся. (Центр масс треугольника — это точка пересечения его медиан.)
5. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90^\circ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на DC , P — такая точка на прямой AC , что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD . Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

Продолжительность олимпиады — 270 минут.

Публикация условий и решений в интернете запрещена до их размещения на официальном сайте олимпиады igo-official.ir.



Профессионалы

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Прямая PQ — их общая касательная, причем точка P лежит на ω_1 , а точка Q — на ω_2 . Рассмотрим произвольную точку X на окружности ω_1 . Прямая AX вторично пересекает ω_2 в точке Y . Точка Y' на окружности ω_2 , отличная от точки Y , такова, что $QY = QY'$. Обозначим вторую точку пересечения прямой $Y'B$ с окружностью ω_1 через X' . Докажите, что $PX = PX'$.
2. Угол A остроугольного треугольника ABC равен 45° . Точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC соответственно. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины B . Обозначим через X середину дуги AH описанной окружности треугольника ADH , содержащей точку D . Докажите, что $DX = DO$.
3. Найдите все натуральные числа $n > 3$ такие, что существует выпуклый n -угольник, в котором каждая диагональ является серединным перпендикуляром по крайней мере к одной другой диагонали.
4. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, диагонали которого не перпендикулярны. Биссектрисы углов между диагоналями AC и BD пересекают отрезки AB , BC , CD , DA в точках K , L , M , N соответственно. Докажите, что если четырехугольник $KLMN$ вписанный, то и четырехугольник $ABCD$ вписанный.
5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A и B , касается отрезка CD в точке E . Другая окружность, проходящая через точки C и D , касается отрезка AB в точке F . Отрезки AE и DF пересекаются в точке G , отрезки BE и CF пересекаются в точке H . Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников AGF , BHF , $CH E$, DGE лежат на одной окружности.

Продолжительность олимпиады — 270 минут.

Публикация условий и решений в интернете запрещена до их размещения на официальном сайте олимпиады igo-official.ir.