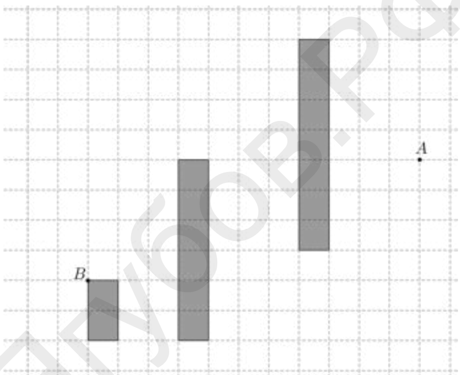
III Иранская олимпиада по геометрии. Начинающие

1. Али хочет добраться из точки A в точку B (см. рис.). По дороге ему нельзя заходить в закрашенные участки плоскости, а в остальные — можно. Путешествовать Али можно не только по линиям сетки, но и по всей плоскости. Помогите Али найти самый короткий путь из точки A в точку B. Просто нарисуйте путь и посчитайте его длину.



2. Вокруг треугольника ABC $(AC > AB)$ описана окружность ω. На стороне AC выбрана точка X, а на окружности ω — точка Y так, что $CX = CY = AB$, а точки A и Y лежат по разные стороны от прямой BC. Прямая XY вторично пересекает окружность ω в точке P. Докажите, что $PB = PC$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. На каждой паре его соседних сторон построили параллелограммы. Докажите, что среди четырех новых точек ровно одна лежит внутри четырёхугольника $ABCD$.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Серединный перпендикуляр к гипотенузе BC пересекает прямую AC в точке K, а серединный перпендикуляр к отрезку BK пересекает прямую AB в точке L. Оказалось, что CL — биссектриса угла ACB. Найдите все возможные значения углов B и C.

5. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что

$$\angle ADC = 135^\circ, \quad \angle ADB - \angle ABD = 2\angle DAB = 4\angle CBD, \quad BC = \sqrt{2}\,CD.$$

Докажите, что $AB = BC + AD$.

III Иранская олимпиада по геометрии. Продолжающие

1. На боковых сторонах трапеции $ABCD$ ($AB||CD$) как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Пусть X и Y — произвольные точки на ω_1 и ω_2 соответственно. Докажите, что длина отрезка XY не превосходит половины периметра четырёхугольника $ABCD$.

2. Окружности C_1 и C_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности C_1 пересекает C_2 в точке P. Прямая PB вторично пересекает C_1 в точке Q. Из точки Q проведена касательная QD к окружности C_2 такая, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой PQ. Эта касательная вторично пересекает C_1 в точке C. Докажите, что AD является биссектрисой угла CAP.

3. Найдите все натуральные числа N такие, что существует треугольник, который можно разрезать на N подобных четырёхугольников.

4. Касательная в точке A описанной окружности ω прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$) пересекает прямую BC в точке P. Точка M — середина дуги AB, не содержащей вершину C. Прямая PM пересекает ω второй раз в точке Q. Касательная к ω в точке Q пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $\angle PKC = 90°$.

5. Окружности ω и ω' пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности ω в точке A пересекает ω' в точке C; касательная к окружности ω' в точке A пересекает ω в точке D. Биссектриса угла CAD пересекает ω и ω' в точках E и F соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает ω и ω' в точках X и Y соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку XY касается описанной окружности треугольника BEF.

III Иранская олимпиада по геометрии. Профессионалы

1. Окружности ω и ω' пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности ω в точке A пересекает окружность ω' в точке C; касательная к окружности ω' в точке A пересекает ω в точке D. Прямая CD пересекает окружности ω и ω' в точках E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E к прямой AC пересекает ω' в точке P; перпендикуляр из точки F к прямой AD пересекает ω в точке Q. Оказалось, что точки A, P и Q лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

2. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, AD — высота. Внутри треугольника ABC отметили точку X такую, что $\angle AXB = \angle DXM = 90°$. Докажите, что $\angle XMB = 2\angle MBC$.

3. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем точка A лежит между D и P. Точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников PAB и PDC соответственно. Пусть O – центр описанной окружности треугольника PAB, H — ортоцентр треугольника PDC. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются тогда и только тогда, когда касаются описанные окружности треугольников AOB и DI_2C.

4. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения сторон AD и BC — в точке F, причем точка A лежит между точками B и E, а также между точками D и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Окружность ω_1 проходит через точку D и касается прямой AC в точке P. Окружность ω_2 проходит через точку C и касается прямой BD в точке P. Пусть X — точка пересечения окружности ω_1 и прямой AD, а Y — точка пересечения окружности ω_2 и прямой BC. Пусть Q — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что перпендикуляр из точки P к прямой EF проходит через центр описанной окружности треугольника XQY.

5. Существуют ли шесть точек плоскости X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 таких, что треугольники $X_iY_jZ_k$ подобны для всех наборов i, j, k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 2$?