

Теорема Менелая

Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1$$

1. Докажите теорему Менелая для случая, когда точки A_1, B_1, C_1 не лежат на сторонах треугольника (а лежат на продолжениях сторон).
2. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC , причём $AM : MB = 1 : 2$, $AN : NC = 3 : 2$. Прямая MN пересекает продолжение стороны BC в точке F . Найдите $CF : BC$.
3. Докажите, что $x = y$.



4. Три прямые проходят через точку O и образуют попарно равные углы. На одной из них взяты точки A_1, A_2 , на другой — B_1, B_2 , так что точка C_1 пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на третьей прямой. Пусть C_2 — точка пересечения A_1B_2 и A_2B_1 . Докажите, что угол C_1OC_2 прямой.
5. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK , и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE . Прямая, проходящая через точку B параллельно CE , пересекает CK в точке F . Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.
6. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($C = 90^\circ$) окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Внеписанная окружность касается продолжения сторону BC за точку C в точке A_1 . Докажите, что B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой.