

Применение теоремы Чевы

1. Через точку P , лежащую на медиане CC_1 треугольника ABC , проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA соответственно). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.
2. Внутри параллелограмма $ABCD$ на его диагонали BD взята произвольная точка K (точка K находится внутри треугольника ACD). На AD и CD выбраны точки N и T так, что $KN \parallel AB$ и $KT \parallel AD$. Докажите, что AT и CN пересекаются на диагонали BD .
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и N . Известно, что $AM = 2$, $BM = 3$, $BN = 1$. Найдите CN , если отрезки AN и CM пересекаются на биссектрисе угла ABC .
4. (**Точка Жергона**) Точки A_1, B_1, C_1 — проекции точки пересечения биссектрис I треугольника ABC на стороны BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отложили отрезок $BN = AC$. Докажите, что медиана CE , биссектриса AF и высота NT треугольника ACN пересекаются в одной точке.
6. (**Точка Нагеля**)
 - (а) Через каждую вершину треугольника провели прямую, которая делит его периметр пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.
 - (б) Пусть A_1 — проекция эксцентра I_A треугольника ABC (точка пересечения внешних биссектрис напротив вершины A) на сторону BC , B_1 — проекция I_B на AC , C_1 — проекция I_C на AB . Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
7. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). На катетах AC и BC во внешнюю сторону построены квадраты $ACDN$ и $CBTK$. Докажите, что BN и AT пересекаются на высоте CH треугольника ABC .
8. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP , пересекаются в одной точке.