Площади!!! И немного синусов.

1. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезки AD и BC в точках N и K соответственно. Известно, что точка O лежит внутри треугольника AMB. Докажите, что четырехугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

2. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

5. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что $S_{ABP} = S_{PQD}$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина высоты, опущенной на гипотенузу AB. Прямые, симметричные AB относительно AD и BD, пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников AFB и ABC.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что $AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, делит отрезок KL пополам.