

Мультипликативные функции

Определение. Будем называть функцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ мультипликативной, если $f(n \cdot k) = f(n) \cdot f(k)$ для взаимно простых n и k .

1. Рассмотрим функцию $C(n)$, равную количеству делителей числа n .
 - (а) Вычислите $C(8), C(15), C(120)$. Удостоверьтесь, что $C(8) \cdot C(15) = C(120)$.
 - (б) Чему равно $C(p^\alpha)$?
 - (в) Докажите, что $C(n)$ — мультипликативная функция.
 - (г) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $C(n)$.
2. Рассмотрим функцию $S(n)$, равную сумме всех делителей числа n .
 - (а) Вычислите $S(8), S(15), S(120)$. Удостоверьтесь, что $S(8) \cdot S(15) = S(120)$.
 - (б) Чему равно $S(p^\alpha)$? Выведите формулу без многоточия.
 - (в) Докажите, что $S(n)$ — мультипликативная функция.
 - (г) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $S(n)$.
3. Натуральное число n таково, что сумма всех его делителей равна D , а сумма всех чисел, обратных его делителям, равна d . Найдите число n .

Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ — функция, равная количеству натуральных чисел, меньших либо равных n и взаимно простых с ним.

Пример. Несложно вычислить, что $\varphi(15) = 8$. Действительно, среди чисел от 1 до 15, только 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 и 14 взаимно просты с 15.

4.
 - (а) Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^\alpha)$? (p — простое число)
 - (б) В таблицу $a \times b$ (a строк, b столбцов) выписаны все числа от 1 до ab подряд (в начале заполняется первая строка, потом вторая и т.д.) для

$$(a = 5; b = 7); (a = 8; b = 5).$$

Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b ? Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a ?

- (в) Какими будут ответы на эти вопросы для произвольных a и b таких, что $\text{НОД}(a, b) = 1$?
- (г) Докажите, что $\varphi(n)$ — мультипликативная функция.
- (е) Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$?