Снова теорема Эйлера

Теорема Эйлера. Пусть n — натуральное число, a — взаимно простое с n. Тогда $(a^{\varphi(n)} - 1)$ делится на n. Где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, количество чисел взаимно простых с n и не больших n.

1. Найдите остатки от деления:
(a) 19^{10} на 6; **(b)** 19^{14} на 70; **(c)** 17^9 на 48; **(d)** $14^{14^{14}}$ на 100.

2. Найдите все целые числа a, для которых число $a^{10} + 1$ делится на 10.

3. Докажите, что $5^{6^7} - 1$ делится на 2016.

4. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.

5. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

6. Пусть $a > 1$, $(a, b) = 1$. Докажите, что найдется такое n, что $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ делится на b.

7. Докажите, что любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей.

8. **(a)** Докажите, что при любом нечётном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.
(b) Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$ для всех чётных n.

9. Докажите, что если у числа n есть два различных нечетных простых делителя, то для числа a взаимно простого с n верно, что $a^{\varphi(n)/2} - 1$ делится на n.

10. Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1}.

11. Найдите все простые p и натуральные n такие, что $7^{p^n} + 1$ делится на p^n.

12. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число K такое, что сумма цифр K равна n и K делится на n.

В этих двух листиках суммарно 16 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этим двум листикам конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
3 — 9 плюсиков;
4 — 11 плюсиков;
5 — 13 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 30 марта.