# Обратные остатки и теорема Вильсона

**Утверждение.** Дано простое число $p$ и его некоторый ненулевой остаток $a$. Существует и при том единственный остаток $b$, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$ (такой остаток $b$ называется *обратным* остатка $a$).

**(Теорема Вильсона)** Пусть $p$ — некоторое простое число. Тогда $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.

**1.** Пусть $5x + 8y \equiv 1 \ (mod\ 13)$
**(a)** Докажите, что $5x + 60y \equiv 1 \ (mod\ 13)$;
**(b)** Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13;
**(c)** Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.

**2.** Сопоставьте каждому остатку его обратный по модулю **(a)** 19; **(b)** 23.

**3.** В Москве каждую секунду один из жителей ест печеньку. Доказать, что если собрать все печеньки, съеденные за 6 недель и одну секунду, то их можно разделить на 11 равных кучек.

**4.** Пусть $a_1, ..., a_p$ — $p$ ($p > 2$ — простое число) подряд идущих чётных чисел. Докажите, что:
**(a)** существует некоторый член последовательности $a_m$, делящийся на $p$;
**(b)** существует некоторый член $a_k$, такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot ...a_p$ делится на $p$;
**(c)** существует некоторый член $a_k$, такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot ...a_p$ делится на $p^2$.

**5.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \underset{p}{\equiv} (-1)^k$.

**6.** **Обратная теорема Вильсона** Докажите, что если $(n-1)! \underset{n}{\equiv} -1$, то число $n$ — простое.

**7.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на $p^2$.

**8.** Пусть числа $p$ и $p+2$ являются простыми числами-близнецами. Докажите, что справедливо $4((p-1)!+1) + p \underset{p^2+2p}{\equiv} 0$.

**9.** **(a)** На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, ..., \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
**(b)** Пусть произведение каких-то $2k+1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \underset{101}{\equiv} -n$.

**10.** **(a)** Найдите все простые числа $p$, такие что $(p-2)!$ не делится на $(p-1)$.
**(b)** Дано простое число $p$. При каких $n$ число $p^n - 1$ делится на $(p-1)^2$.
**(c)** Для каких натуральных $n$ число $(n-1)!+1$ является точной степенью $n$.