

Инвариант. Делимость.

1. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?
3. Илья Муромец рубил головы Змею Горынычу. Если за один удар он срубал 7 голов, то выростали новые 4 головы. Если же он срубал 2 головы, то выростали новые 8 голов. Убьет ли Илья Муромец Змея Горыныча, если у того первоначально было три головы?
4. Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
5. В трех вершинах квадрата сидит по кузнечику. За один ход любой кузнечик допрыгивает до любого другого кузнечика и сразу же делает еще один такой же прыжок в том же направлении. Могут ли кузнечики через несколько прыжком собраться в других трех вершинах того же квадрата?
6. На 12 деревьях, расположенных по окружности, сидели 12 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.
7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?