

## Рациональное и не очень

— А потом они все написали на регионе, что у числа есть «иррациональная часть»!  
 — Боже, прекрати, они всего лишь дети!

---

По мотивам региона 2019

**Определение.** Действительное число  $\alpha$  называется *рациональным*, если оно представимо в виде  $\frac{p}{q}$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , и *иррациональным* в противном случае.

1. Докажите, что следующие числа иррациональны:

(a)  $\sqrt{2}$ ; (b)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{2019}}$ ; (c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ; (d)  $e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ ;  
 (e\*)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11} + \sqrt{13}$ .

2. (a) Докажите, что любое рациональное число  $\frac{p}{q}$  можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби (возможно, с предпериодом).

(b) Докажите, что полученная десятичная дробь конечна тогда и только тогда, когда  $q = 2^m 5^n$ .

(c) Докажите, что если  $(q, 10) = 1$ , то предпериода нет.

3. Рационально ли число  $0,1234567891011121314\dots$ ?

4. Докажите, что если число  $a + b\sqrt{2}$ , где  $a$  и  $b$  рациональны, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то и число  $a - b\sqrt{2}$  является корнем этого многочлена.

5. Действительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что для любых различных простых нечётных  $p$  и  $q$  число  $x^p + y^q$  рационально. Докажите, что  $x$  и  $y$  — рациональные числа.

6. Алексей Вадимович и Юлий Васильевич по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Юлий Васильевич своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Алексей Вадимович — одну. Если в итоге получится рациональное число, выигрывает Юлий Васильевич, иначе — Алексей Вадимович. Кто имеет выигрышную стратегию?

7. Докажите, что из арифметической прогрессии с первым членом  $a$  и разностью  $d \neq 0$  можно выбрать подпоследовательность, являющуюся геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение  $\frac{a}{d}$  рационально.