Ты — дерево, твое место в саду

1. Докажите, что для любого набора чисел $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ такого, что $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$, найдется дерево, где степени вершин будут $d_1, \ldots, d_n$.
2. А единственно ли дерево из предыдущей задачи?
3. Может ли у графа быть ровно два остовных дерева?
4. В группе каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.
5. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до n. Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины i и j смежны, то они и раньше были смежны. Докажите, что найдется либо вершина номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.
6. В графе есть остовное дерево с m висячими вершинами и остовное дерево с n висячими вершинами. Докажите, что для всякого k такого, что $m < k < n$, найдется остовное дерево с k висячими вершинами.
7. В стране n городов, между некоторыми есть дороги. Известно, что из каждого города можно попасть в каждый, причем из каждого города выходит не более d дорог. Докажите, что всю страну можно разделить на два региона так, что в каждом регионе можно будет из любого города попасть в любой и размер каждого региона будет не меньше $\lfloor \frac{n-1}{d} \rfloor$.
8. Имеется многоугольник с n вершинами. Докажите, что в нем найдется диагональ, лежащая целиком внутри него, такая, что после её проведения получаются многоугольники с не менее чем $\frac{n}{3} - 1$ сторонами. (можно без доказательства пользоваться тем фактом, что в любом многоугольнике найдется диагональ, лежащая внутри)