Определение 1. *Однородным симметрическим многочленом*, порождённым упорядоченным набором вещественных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdot x_2^{a_{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_{\sigma(n)}},$$

где суммирование ведётся по множеству S_n всех перестановок на n элементах.

Примеры: $T(3,2,1) = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^3z^2y + z^3y^2x + y^3x^2z$; $T(1,1,0) = 2 \cdot (xy + yz + zx)$; $T(1,1,1) = 6xyz$.

Определение 2. Пусть дано два набора действительных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Мы говорим, что набор a_i вещественных чисел *мажорирует* набор b_i, если выполнена система из неравенств и одного равенства (запись $a_i \succ b_i$):

$$\begin{gathered} a_1 \geqslant b_1; \\ a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2; \\ a_1 + a_2 + a_3 \geqslant b_1 + b_2 + b_3; \\ \ldots \\ a_1 + \ldots + a_{n-1} \geqslant b_1 + \ldots + b_{n-1}; \\ a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n. \end{gathered}$$

Неравенство Мюрхеда. Если $a_i \succ b_i$, то при всех положительных значениях переменных

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant T(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Бесполезные рекомендации: T-обозначения юзабельны; используйте их, когда приходится раскрывать страшные скобки. Пример:

$$(a+b+c)^3 = \frac{1}{2} \cdot T(3,0,0) + 3 \cdot T(2,1,0) + T(1,1,1).$$

Для проверки вычислений подставляйте $a = b = c = 1$: $(1+1+1)^3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 6$. Если исходное неравенство (или связка) не однородное, хорошо помогает подстановка вместо всех переменных $a = a'/t$, а затем выражение t в неравенстве и в связке.

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$a^5 + b^5 + c^5 \geqslant \frac{1}{2} \cdot (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3).$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$1 - 2\sqrt{abc(a+b+c)} + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 0.$$

Когда в неравенстве достигается равенство?

3. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

5. Про положительные числа a, b, c известно, что $\frac{3}{abc} \geqslant a+b+c$. Докажите, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c.$$

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd.$$