

1. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр внеписанной окружности треугольника CDA , касающейся стороны AC , лежат на одной прямой.

2. Пусть A, B, C, D — четыре различные точки на прямой, расположенные в указанном порядке. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y . Прямые XY и BC пересекаются в точке Z . Пусть P — точка на прямой XY , отличная от Z . Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M , а прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N . Докажите, что прямые AM , DN и XY пересекаются в одной точке.

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1 , а описанную окружность этого треугольника — в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P . Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром вписанной окружности треугольника ABC , параллелен AC .

4. Вписанная окружность с центром I треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F . Точка K — основание перпендикуляра из точки D на EF . Докажите, что DK — биссектриса угла IKH , где H — ортоцентр треугольника ABC .

5. Дан остроугольный треугольник ABC , причем $AB > AC$ и $\angle A = 60^\circ$. Точки O и H — его центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Прямая OH пересекает сторону AB в точке P и сторону AC в точке Q . Найдите $\frac{PO}{HQ}$.

6. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки B' и A' . Описанная окружность треугольника ABC вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную $A'B'$, в точке D . Описанная окружность треугольника $A'B'C$ вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB , в точке E . Докажите, что прямые AB , $A'B'$ и DE пересекаются в одной точке.

7. Пусть I и H — центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC . Точка P на BC такова, что $PI \perp AI$, M — середина AP . Окружность с диаметром IM пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках U и V . Докажите, что точки U , V и H лежат на одной прямой.

8. Вписанная окружность S треугольника ABC касается сторон AC , BC и AB в точках B_1 , A_1 и C_1 соответственно. Через вершину A проведена прямая l , параллельная BC . Прямая B_1C_1 пересекает l в точке K . Прямая KA_1 пересекает S в точке L . Докажите, что касательная к S , проходящая через L , содержит середину стороны BC .

1. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр внеписанной окружности треугольника CDA , касающейся стороны AC , лежат на одной прямой.

2. Пусть A, B, C, D — четыре различные точки на прямой, расположенные в указанном порядке. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y . Прямые XY и BC пересекаются в точке Z . Пусть P — точка на прямой XY , отличная от Z . Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M , а прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N . Докажите, что прямые AM , DN и XY пересекаются в одной точке.

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1 , а описанную окружность этого треугольника — в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P . Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром вписанной окружности треугольника ABC , параллелен AC .

4. Вписанная окружность с центром I треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F . Точка K — основание перпендикуляра из точки D на EF . Докажите, что DK — биссектриса угла IKH , где H — ортоцентр треугольника ABC .

5. Дан остроугольный треугольник ABC , причем $AB > AC$ и $\angle A = 60^\circ$. Точки O и H — его центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Прямая OH пересекает сторону AB в точке P и сторону AC в точке Q . Найдите $\frac{PO}{HQ}$.

6. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки B' и A' . Описанная окружность треугольника ABC вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную $A'B'$, в точке D . Описанная окружность треугольника $A'B'C$ вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB , в точке E . Докажите, что прямые AB , $A'B'$ и DE пересекаются в одной точке.

7. Пусть I и H — центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC . Точка P на BC такова, что $PI \perp AI$, M — середина AP . Окружность с диаметром IM пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках U и V . Докажите, что точки U , V и H лежат на одной прямой.

8. Вписанная окружность S треугольника ABC касается сторон AC , BC и AB в точках B_1 , A_1 и C_1 соответственно. Через вершину A проведена прямая l , параллельная BC . Прямая B_1C_1 пересекает l в точке K . Прямая KA_1 пересекает S в точке L . Докажите, что касательная к S , проходящая через L , содержит середину стороны BC .