

Серия 11. Предрегиональный разнбой

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD . Отрезки BF и AC пересекаются в точке L . Докажите, что $BC = CL$.
2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке X . На отрезках AX , DX отмечены точки P и Q соответственно, так что $\angle AQC = \angle BPD$. Докажите, что четырёхугольник $BCQP$ — вписанный.
3. На отрезке, соединяющем точку C с серединой медианы AM равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), нашлась такая точка X , что $\angle MXC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AXB = 90^\circ$.
4. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E , что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, что площади треугольника ABC и четырёхугольника $AECD$ равны.
5. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . Точка O — центр окружности (ABD). Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K . Найдите отношение AO/OK .
6. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q . Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P , пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X . Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.
7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. На лучах AC и DC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = AB$ и $DQ = DB$. Докажите, что прямая PQ проходит через отражение вершины B относительно прямой AD .
8. Let ABC be an acute-angled triangle with circumcircle Γ and orthocenter H . Let K be a point of Γ on the other side of BC from A . Let L be the reflection of K in the line AB , and let M be the reflection of K in the line BC . Let E be the second point of intersection of Γ with the circumcircle of triangle BLM . Show that the lines KH , EM and BC are concurrent.