

Задачи на наименьшее и наибольшее значения

Продолжим заниматься экстремальными задачами. На этом занятии вам встретятся задачи, в которых потребуется определять как наименьшее, так и наибольшее значение в различных геометрических конструкциях, причем эти значения связаны не только с расстояниями.

Пример. Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC . При каком положении точки M длина PQ – наибольшая?

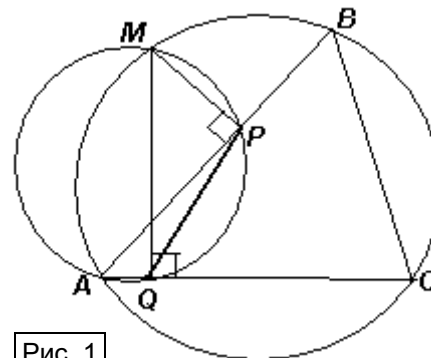


Рис. 1

Решение. Так как $\angle APM = \angle AQM = 90^\circ$, то точки A , M , P и Q лежат на одной окружности с диаметром AM (см. рис. 1). По следствию из теоремы синусов $PQ = AM \cdot \sin \angle BAC$. Так как угол BAC – фиксирован, то наибольшее значение PQ достигается при наибольшем значении AM , то есть в случае, когда AM – диаметр данной окружности.

Ответ: M – точка, диаметрально противоположная точке A .

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Какое наименьшее значение может принимать периметр неравностороннего треугольника с целыми длинами сторон?
2. Какой из треугольников с данной стороной и данной высотой, проведенной к этой стороне, имеет наименьший периметр?
3. В треугольнике ABC : $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 15^\circ$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной AED .
4. В треугольнике ABC : $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 20^\circ$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной $AEDC$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M и из нее опущены перпендикуляры MK и MP на катеты этого треугольника. При каком положении точки M длина отрезка PK будет наименьшей?
6. Дан треугольник ABC . Найдите на прямой AB такую точку M , для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM будет наименьшей.
7. Дан треугольник ABC . Через вершину B проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин A и C была наибольшей.
8. Внутри окружности с центром O дана точка A . а) Через точку A проведите хорды наибольшей и наименьшей длины. б) Найдите на окружности точку M , для которой угол OMA – наибольший.
9. На одной из сторон острого угла XOY отмечены точки A и B . а) Укажите на другой стороне угла точку C , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. б) Объясните, как построить эту точку.
10. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O . Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно b и a . Найдите наибольшее значение суммы $OM + ON$, если угол ACB является переменной величиной.