

Серия 13. Комбинаторный разнобой.

1. A total of 2010 coins are distributed in 5 boxes. At the beginning the quantities of coins in the boxes are consecutive natural numbers. Martha should choose and take one of the boxes, but before that she can do the following transformation finitely many times: from a box with at least 4 coins she can transfer one coin to each of the other boxes. What is the maximum number of coins that Martha can take away?

2. Есть три колодца с камнями. Каждый час Сизиф вытаскивает камень из одного из колодцев. За это Зевс платит ему число серебряных талантов, равное числу оставшихся в этом колодце камней. Потом Сизиф сбрасывает камень в один из других двух колодцев. За это Зевс забирает у Сизифа столько талантов, сколько камней было в этом колодце до сбрасывания. (Если у Сизифа не хватает монет, у него накапливается долг). Через 100 лет все камни оказались на своих первоначальных местах. Каков максимальный заработок Сизифа за это время?

3. Докажите, что для любого нечётного простого числа p и любых $p-1$ чисел, не кратных p , можно часть этих чисел взять со знаком «+», а оставшуюся часть со знаком «-» так, чтобы получившаяся сумма была кратна p .

4. Распределение между группами 10-1 и 10-2 происходит следующим образом. Сначала все дети в группе 10-1. Пишется некоторый список школьников (не обязательно состоящий из всех посетителей кружка), а затем он зачитывается по-одному. После упоминания школьника, его и всех его друзей (не только из текущей группы) переводят в противоположную группу. После того как весь список зачитают, получится некоторое распределение школьников по группам.

а) Докажите, что количество этих распределений всегда чётно.

б) Докажите, что можно составить такой список, чтобы всех перевести в группу 10-2.

5. На сдаче экзамена СОВ учеников смогли рассадить по n рядам так, чтобы ни у одного из них не было друзей в своём ряду. При этом рассадить их таким же образом по $n-1$ рядам было невозможно. Докажите, что на каждом ряду можно выбрать старосту так, чтобы любые два старосты на соседних рядах были бы друзьями.