ЦПМ. Группа 10-2 **11.02.2019**

Рекурренты

1. Найдите a_n, если $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+3^n a_n}$, $n \geqslant 1$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что $a_n < 2$ при $n \geqslant 1$.

3. Последовательность $\{b_n\}$ определена как $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_{n+1} = 5b_n - 6b_{n-2}$, $n \geqslant 2$.
а) Докажите, что $b_{n+1} - 2b_n$ является геометрической прогрессией.
б) Определим последовательность $\{a_n\}$ как $a_1 = 1$, $a_n = b_n\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{n-1}}\right)$, $n \geqslant 2$. Докажите, что $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) < 3$.

4. Последовательность $\{u_n\}$ определена как $u_1 > \frac{1}{2}$, $u_2 = 2u_1$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2u_{n+1}^2}{2u_n}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n}}{n}$.

5. Последовательность чисел $\{h_n\}$ задана условиями $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$, $n \geqslant 1$. Докажите неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k < 1,03$.

6. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ для натуральных n. Найдите а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)$.

7. Последовательность задана условиями $a_1 = 100$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geqslant 1$. Найдите $[a_{2019}]$.

8. а)Докажите, что если $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ и $0 < x_1 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.
б) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(\alpha - x_n) = \alpha^2$, где $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

ЦПМ. Группа 10-2 **11.02.2019**

Рекурренты

1. Найдите a_n, если $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+3^n a_n}$, $n \geqslant 1$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что $a_n < 2$ при $n \geqslant 1$.

3. Последовательность $\{b_n\}$ определена как $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_{n+1} = 5b_n - 6b_{n-2}$, $n \geqslant 2$.
а) Докажите, что $b_{n+1} - 2b_n$ является геометрической прогрессией.
б) Определим последовательность $\{a_n\}$ как $a_1 = 1$, $a_n = b_n\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{n-1}}\right)$, $n \geqslant 2$. Докажите, что $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) < 3$.

4. Последовательность $\{u_n\}$ определена как $u_1 > \frac{1}{2}$, $u_2 = 2u_1$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2u_{n+1}^2}{2u_n}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n}}{n}$.

5. Последовательность чисел $\{h_n\}$ задана условиями $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$, $n \geqslant 1$. Докажите неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k < 1,03$.

6. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ для натуральных n. Найдите а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)$.

7. Последовательность задана условиями $a_1 = 100$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geqslant 1$. Найдите $[a_{2019}]$.

8. а)Докажите, что если $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ и $0 < x_1 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.
б) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(\alpha - x_n) = \alpha^2$, где $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.