

Определение. Пусть ω — окружность, X — точка. Прямая ℓ , проходящая через X , пересекает ω в точках A и B . *Степенью точки X относительно окружности ω* называется величина (не зависящая от прямой ℓ)

$$\deg(X, \omega) = \begin{cases} +XA \cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит вне } \omega; \\ -XA \cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит внутри } \omega. \end{cases}$$

Если X лежит вне ω , то $\deg(X, \omega)$ есть квадрат длины касательной из X к ω .

1. Окружности ω и Ω пересекаются в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ делит пополам общую внешнюю касательную ω и Ω .

2. Пусть ω — окружность с центром O и радиусом R , X — произвольная точка. Докажите, что $\deg(X, \omega) = OX^2 - R^2$.

3. В угол вписаны две окружности. Первая окружность касается одной из сторон угла в точке K , вторая касается другой стороны угла в точке L . Докажите, что прямая KL отсекает на окружностях равные хорды.

4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P , причем $\angle APB < 90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

6. На окружности ω выбраны точки A, B, C так, что $AB = BC$. Касательные к ω в точках A и B пересекаются в точке D ; E — точка пересечения DC и ω . Докажите, что прямая AE делит пополам отрезок BD .

7. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S . Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.

8. В остроугольном треугольнике ABC прямые a и b содержат высоты, проведенные из вершин A и B соответственно. Окружности ω_A и ω_B построены на отрезках BC и AC соответственно как на диаметрах. Прямая a пересекает ω_A в точках P и Q , прямая b пересекает ω_B в точках R и S . Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

9. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Определение. Пусть ω — окружность, X — точка. Прямая ℓ , проходящая через X , пересекает ω в точках A и B . *Степенью точки X относительно окружности ω* называется величина (не зависящая от прямой ℓ)

$$\deg(X, \omega) = \begin{cases} +XA \cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит вне } \omega; \\ -XA \cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит внутри } \omega. \end{cases}$$

Если X лежит вне ω , то $\deg(X, \omega)$ есть квадрат длины касательной из X к ω .

1. Окружности ω и Ω пересекаются в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ делит пополам общую внешнюю касательную ω и Ω .

2. Пусть ω — окружность с центром O и радиусом R , X — произвольная точка. Докажите, что $\deg(X, \omega) = OX^2 - R^2$.

3. В угол вписаны две окружности. Первая окружность касается одной из сторон угла в точке K , вторая касается другой стороны угла в точке L . Докажите, что прямая KL отсекает на окружностях равные хорды.

4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P , причем $\angle APB < 90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

6. На окружности ω выбраны точки A, B, C так, что $AB = BC$. Касательные к ω в точках A и B пересекаются в точке D ; E — точка пересечения DC и ω . Докажите, что прямая AE делит пополам отрезок BD .

7. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S . Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.

8. В остроугольном треугольнике ABC прямые a и b содержат высоты, проведенные из вершин A и B соответственно. Окружности ω_A и ω_B построены на отрезках BC и AC соответственно как на диаметрах. Прямая a пересекает ω_A в точках P и Q , прямая b пересекает ω_B в точках R и S . Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

9. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.