8 класс Отборочная олимпиада 12 января 2019

1. Среди 63 внешне одинаковых монет есть 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие монеты также весят одинаково, и фальшивая монета легче настоящей. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} \geqslant 3.$$

3. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k такой, что $b_k < a_k$. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

4. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите $\angle CEF$.

5. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — *мини-слон*, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?

6. $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих членов, может быть в последовательности $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\ldots$?

8 класс Отборочная олимпиада 12 января 2019

1. Среди 63 внешне одинаковых монет есть 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие монеты также весят одинаково, и фальшивая монета легче настоящей. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} \geqslant 3.$$

3. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k такой, что $b_k < a_k$. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

4. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите $\angle CEF$.

5. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — *мини-слон*, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?

6. $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих членов, может быть в последовательности $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\ldots$?