8 класс | **Обходы графов** | 10 ноября 2018

**Определения.** *Путь* в графе — это последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

*Простой путь (цикл)* — это путь (цикл), который проходит через каждую вершину не более одного раза.

*Гамильтонов путь (цикл)* — это простой путь (цикл), который проходит по всем вершинам графа.

*Эйлеров путь (цикл)* — это путь (цикл), который проходит по всем ребрам графа по одному разу.

**1. а)** Докажите, что если в графе степени всех вершин четные, то его можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам циклов.

**б)** Докажите, что если в связном графе степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл.

**2.** Докажите, что если в графе вершин нечетной степени ровно 200, то его можно представить в виде объединения непересекающихся циклов и 100 самонепересекающихся путей.

**3.** Найдите максимальное возможное количество ребер в планарном графе на $n \geqslant 5$ вершинах, в котором есть эйлеров путь.

**4.** Минимальная степень вершины в графе равна $m \geqslant 2$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины хотя бы $m+1$.

**5.** Про связный граф известно, что количество ребер в нем хотя бы в $k$ раз больше, чем количество вершин.

**а)** Докажите, что найдется подграф, в котором минимальная степень вершины больше $k$.

**б)** Докажите, что в графе найдется простой цикл длины хотя бы $k+2$.

**6.** В графе максимальный простой путь имеет вид $v_1 \ldots v_n$, где $n > 2$. Сумма степеней $v_1$ и $v_n$ хотя бы $n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины $n$.

**7. Теорема Оре.** Дан граф на $n$ вершинах.

**а)** Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы $n-1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.

**б)** Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы $n$. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

**8.** Степени всех вершин связного графа хотя бы $m$, где $m \geqslant 3$. Найдите наименьшее число вершин в таком графе, если известно, что в нём нет гамильтонова цикла.

**9.** В графе 2019 вершин и для любых двух вершин $A$ и $B$ существует путь из $A$ в $B$, являющийся гамильтоновым. Каково минимальное количество ребер в таком графе?

8 класс | **Обходы графов** | 10 ноября 2018

**Определения.** *Путь* в графе — это последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

*Простой путь (цикл)* — это путь (цикл), который проходит через каждую вершину не более одного раза.

*Гамильтонов путь (цикл)* — это простой путь (цикл), который проходит по всем вершинам графа.

*Эйлеров путь (цикл)* — это путь (цикл), который проходит по всем ребрам графа по одному разу.

**1. а)** Докажите, что если в графе степени всех вершин четные, то его можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам циклов.

**б)** Докажите, что если в связном графе степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл.

**2.** Докажите, что если в графе вершин нечетной степени ровно 200, то его можно представить в виде объединения непересекающихся циклов и 100 самонепересекающихся путей.

**3.** Найдите максимальное возможное количество ребер в планарном графе на $n \geqslant 5$ вершинах, в котором есть эйлеров путь.

**4.** Минимальная степень вершины в графе равна $m \geqslant 2$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины хотя бы $m+1$.

**5.** Про связный граф известно, что количество ребер в нем хотя бы в $k$ раз больше, чем количество вершин.

**а)** Докажите, что найдется подграф, в котором минимальная степень вершины больше $k$.

**б)** Докажите, что в графе найдется простой цикл длины хотя бы $k+2$.

**6.** В графе максимальный простой путь имеет вид $v_1 \ldots v_n$, где $n > 2$. Сумма степеней $v_1$ и $v_n$ хотя бы $n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины $n$.

**7. Теорема Оре.** Дан граф на $n$ вершинах.

**а)** Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы $n-1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.

**б)** Известно, что сумма степеней любых двух вершин хотя бы $n$. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

**8.** Степени всех вершин связного графа хотя бы $m$, где $m \geqslant 3$. Найдите наименьшее число вершин в таком графе, если известно, что в нём нет гамильтонова цикла.

**9.** В графе 2019 вершин и для любых двух вершин $A$ и $B$ существует путь из $A$ в $B$, являющийся гамильтоновым. Каково минимальное количество ребер в таком графе?