8 класс — **Делители** — 20 апреля 2019

Определение. Для натурального числа n обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей n, а через $\sigma(n)$ — сумму всех натуральных делителей n.

1. Докажите, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$.

2. Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n на простые множители.

а) Докажите формулы $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ и

$$\sigma(n) = (1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\ldots(1+p_k+\ldots+p_2^{\alpha_k}).$$

б) Для взаимно простых m и n докажите, что $\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$ и $\sigma(m)\sigma(n) = \sigma(mn)$. Данное свойство называется *мультипликативностью.*

4. У натурального числа n есть ровно 6 натуральных делителей, и их сумма равна 78. Найдите n.

5. Петя нашёл сумму всех нечётных натуральных делителей некоторого чётного числа (включая 1), а Вася — сумму всех чётных натуральных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Определение. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа.

6. Докажите, что совершенное число не может быть точным квадратом.

7. а) Пусть число 2^k-1 — простое. Докажите, что k — простое.

б) Докажите, что $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа, является совершенным числом.

в*) Докажите, что n является чётным совершенным числом тогда и только тогда, когда оно имеет вид $2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа.

8. Докажите, что каждое натуральное число n является разностью двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей,

а) для чётных n; **б*)** для нечётных n.

8 класс — **Делители** — 20 апреля 2019

Определение. Для натурального числа n обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей n, а через $\sigma(n)$ — сумму всех натуральных делителей n.

1. Докажите, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$.

2. Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n на простые множители.

а) Докажите формулы $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ и

$$\sigma(n) = (1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\ldots(1+p_k+\ldots+p_2^{\alpha_k}).$$

б) Для взаимно простых m и n докажите, что $\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$ и $\sigma(m)\sigma(n) = \sigma(mn)$. Данное свойство называется *мультипликативностью.*

4. У натурального числа n есть ровно 6 натуральных делителей, и их сумма равна 78. Найдите n.

5. Петя нашёл сумму всех нечётных натуральных делителей некоторого чётного числа (включая 1), а Вася — сумму всех чётных натуральных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Определение. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа.

6. Докажите, что совершенное число не может быть точным квадратом.

7. а) Пусть число 2^k-1 — простое. Докажите, что k — простое.

б) Докажите, что $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа, является совершенным числом.

в*) Докажите, что n является чётным совершенным числом тогда и только тогда, когда оно имеет вид $2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа.

8. Докажите, что каждое натуральное число n является разностью двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей,

а) для чётных n; **б*)** для нечётных n.