Серия 3. Комбинаторная ТЧ

1. Даны натуральные числа m и n и два набора попарно различных вещественных чисел $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$. Какое наименьшее количество различных чисел может встретиться среди mn всевозможных сумм $a_i + b_j$?

2. *(Не баян, а классика)* Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?

3. **(a)** Дано n целых чисел.
(b) Дано $n-1$ целое число. Среди них не все попарно сравнимы по модулю n.
(c) Дано $n-2$ целых числа. Среди них нет $n-3$ попарно сравнимых по модулю n.
Докажите, что среди них найдутся несколько с суммой, делящейся на n.

4. Набор из $n+2$ чисел назовем *неинтересным*, если сумма любых n из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все неинтересные наборы.

5. Дано натуральное число n. Рассмотрим множество всех целых чисел, по модулю не превосходящих n. Какое наибольшее число элементов можно выбрать из этого множества так, чтобы не нашлось трех различных выбранных чисел a, b и c, для которых $a+b=c$?

6. Пусть p — нечетное простое число. Найдите число p-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, сумма элементов которых делится на p.

7. В стране выпускают монеты номиналом $1/n$ для каждого натурального n. Дан конечный набор монет суммарной стоимостью не более $99,5$ (номиналы не обязаны быть различными). Докажите, что монеты этого набора можно разбить на не более чем 100 групп так, чтобы суммарная стоимость монет в каждой группе не превышала 1.