11 класс

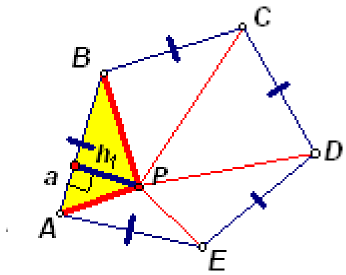
1.1. (***6 баллов***) Известно, что каждое из двух квадратных уравнений f(x) = 0 и g(x) = 0 имеет ровно один действительный корень, причем эти корни различны. Может ли уравнение f(x) + g(x) = 0 также иметь ровно один действительный корень?

Ответ: да, может.

Например, f(x) = x^2 – 2x + 1; g(x) = –x^2 – 4x – 4. Тогда уравнение f(x) = 0 имеет единственный корень 1, уравнение g(x) = 0 имеет единственный корень –2, а уравнение f(x) + g(x) = 0 принимает вид –6x – 3 = 0, поэтому также имеет единственный корень: –0,5.

Квадратные трехчлены, удовлетворяющие условию, должны иметь вид: $f(x) = a(x - b)^2$ и $g(x) = -a(x - c)^2$, где $a \neq 0$ и $b \neq c$. Тогда $f(x) + g(x) = a(c - b)(2x - b - c)$, поэтому уравнение $f(x) + g(x) = 0$ является линейным уравнением с единственным корнем.

1.2. (***6 баллов***) Сумма расстояний от каждой внутренней точки выпуклого пятиугольника до всех прямых, содержащих его стороны, одна и та же. Верно ли, что этот пятиугольник обязательно является правильным?



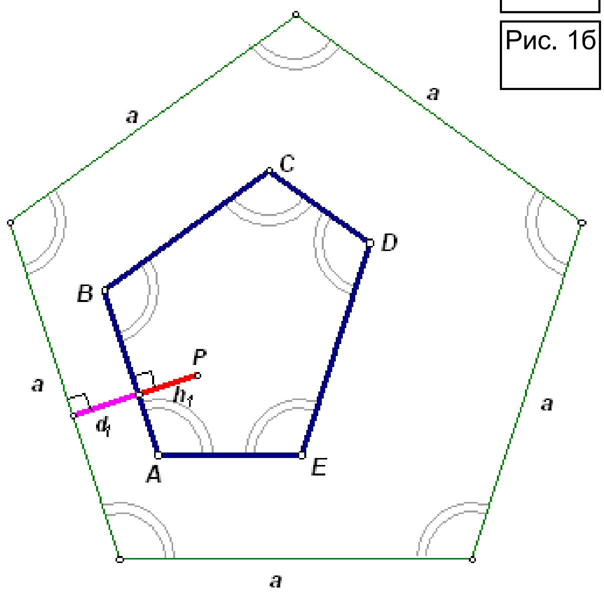
Ответ: нет, не верно.

Достаточно, например, рассмотреть пятиугольник *ABCDE*, у которого равны только стороны (см. рис. 1а).

Указанная в условии сумма расстояний не зависит от выбора внутренней точки *P*. Действительно, соединив точку *P* с вершинами пятиугольника, получим пять треугольников. Сумма их площадей равна площади *ABCDE*, причем площадь *i* – го треугольника вычисляется по формуле $S_i = \frac{1}{2}ah_i$, где h_i – расстояние от точки *P* до соответствующей стороны пятиугольника, *a* – длина этой стороны. Следовательно, $S_{ABCDE} = \sum_{i=1}^{5} S_i = \frac{1}{2}a\sum_{i=1}^{5} h_i$, тогда $\sum_{i=1}^{5} h_i = \frac{2S_{ABCDE}}{a}$ – постоянная величина, не зависящая от выбора точки *P*.

Рис. 1а

Рис. 1б



Отметим, что существует и другой, менее очевидный пример пятиугольника, обладающего указанными свойствами. Это пятиугольник, все углы которого равны. Для доказательства поместим такой пятиугольник внутри правильного пятиугольника так, чтобы их стороны были соответственно параллельны (см. рис. 1б). Пусть d_i – расстояние между соответствующими сторонами пятиугольников. Так как правильный пятиугольник является равносторонним, то по доказанному выше,

$\sum_{i=1}^{5}\left(h_i+d_i\right)=\sum_{i=1}^{5}h_i+\sum_{i=1}^{5}d_i$ *есть величина постоянная. Так как каждое из* d_i *не зависит от выбора внутренней точки P, то и* $\sum_{i=1}^{5}d_i$ *от него не зависит, следовательно,* $\sum_{i=1}^{5}h_i$ *не будет зависеть от выбора точки P.*

Отметим также, что сказанное выше справедливо для любого выпуклого n – угольника. Особым является только случай n = 3, так как для того, чтобы треугольник являлся правильным достаточно, чтобы выполнялось одно условие: равенство его сторон либо равенство его углов.

1.3. (***6 баллов***) Натуральное число называется примарным, если оно является степенью простого числа с натуральным показателем (например, 7^1 или 13^4). Найдите самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.

Ответ: 2, 3, 4, 5.

Эти числа удовлетворяют условию, так как $2 = 2^1$; $3 = 3^1$; $4 = 2^2$; $5 = 5^1$.

Предположим, что есть другая цепочка примарных чисел, идущих подряд, содержащая не менее четырех чисел. Тогда хотя бы два из них – чётные, поэтому должны являться степенями двойки – единственного четного простого числа. Так как разность этих чисел равна 2, то это могут быть только числа 2 и 4. Числа 1 и 6 не являются примарными, поэтому более четырех чисел в цепочке быть не может и другой четвёрки примарных чисел, идущих подряд, не существует.

2.1. (***7 баллов***) Существуют ли две функции f(x) и g(x), определенные на R и тождественно не равные нулю, такие, что $f(g(x)) \equiv 0$ и $g(f(x)) \equiv 0$?

Ответ: да, существуют.

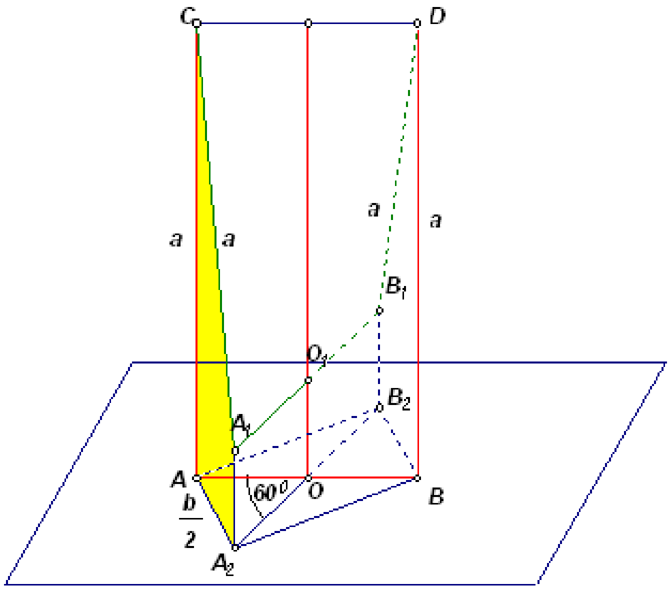
Есть много примеров функций, удовлетворяющих условию. Приведем два различных примера, задавая функции различными способами.

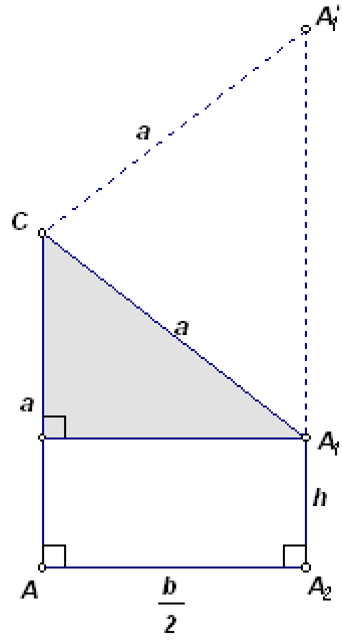
1) $f(x) = [x]$ (целая часть числа x); $g(x) = \{x\}$ (дробная часть числа x). Тогда при любых $x \in R$ $[\{x\}] = \{[x]\} = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases}1, \text{ если } x = 3\\ 0, \text{ если } x \neq 3\end{cases}$; $g(x) = \begin{cases}1, \text{ если } x = 2\\ 0, \text{ если } x \neq 2\end{cases}$. Обе функции принимают только два значения: 0 и 1, причем $f(0) = g(0) = 0$ и $f(1) = g(1) = 0$, поэтому, при любых $x \in R$ $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$.

2.2. (***7 баллов***) На параллельных веревках длины a подвешена балка длины b (см. рис.). Ее повернули вокруг вертикальной оси на угол 60° так, что в процессе поворота веревки оставались натянутыми. На какую высоту поднялась балка?

Ответ: на высоту $h = a - \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$.





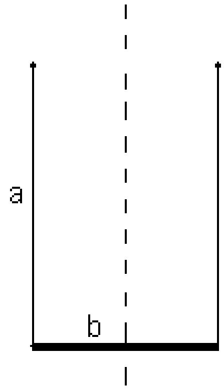


Рис. 2а

Рис. 2б

Пусть балка AB, изначально висящая на веревках CA и DB, после поворота заняла положение A_1B_1 (см. рис. 2а). По условию: $CA_1 = DB_1 =$ a. Середина O_1 отрезка A_1B_1 лежит на оси, а ортогональная проекция A_2B_2 этого отрезка на горизонтальную плоскость образует с начальным положением балки AB угол 60°. Кроме того, O – середина отрезков AB и A_2B_2, причем $A_2B_2 = AB = b$, поэтому AA_2BB_2 – прямоугольник и $AA_2 = \frac{b}{2}$.

Искомое расстояние $h = OO_1 = A_1A_2$ найдем из прямоугольной трапеции CAA_2A_1 (см. рис. 2б): $(a-h)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 - 2ah + \frac{b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$. Рассматриваемому случаю соответствует знак минус перед корнем.

Заметим, что ответ $h = a + \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ *также не лишен некоторого смысла. Он соответствует положению точки A_1' на рисунке 2б, когда балка, повернувшись, оказалась выше горизонтальной плоскости, в которой лежат точки крепления веревок C и D.*

2.3. (***7 баллов***) Найдите все целые решения уравнения: $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0$.

Ответ: (0; 1); (–1; 0).

Первый способ. Преобразуем данное уравнение, выразив переменную y через переменную x: $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y(2x + 1) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2x+1} + 1$, так как $2x +$

$1 \neq 0$ при любых целых значениях x. Для того, чтобы y было целым, необходимо и достаточно, чтобы дробь $\frac{x^2}{2x+1}$ принимала целые значения.

Заметим, что НОД($2x + 1$; x) = НОД($x + 1$; x) = 1, поэтому числа x^2 и $2x + 1$ – взаимно простые. Следовательно, выражение $\frac{x^2}{2x+1}$ принимает целые значения, если $2x + 1 = \pm 1$. Таким образом, решения данного уравнения: $x = 0$; $y = 1$ или $x = -1$; $y = 0$.

Второй способ. Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной x: $x^2 - 2(y-1)x - (y-1) = 0$. Его решения: $x = (y-1) \pm \sqrt{D'}$, где $D' = (y-1)^2 + (y-1) = (y-1)y$.

Для того, чтобы x было целым, необходимо и достаточно, чтобы D' являлось квадратом целого числа. Это возможно только, если $D' = 0 \Leftrightarrow y = 1$ или $y = 0$, так как в остальных случаях число $(y-1)y$ находится в интервале между двумя соседними квадратами: $(y-1)^2$ и y^2. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1$.

Третий способ. Преобразуем данное уравнение, выделив квадрат трехчлена: $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = (y-1)y$. По доказанному выше $(y-1)y$ является квадратом целого числа тогда, и только тогда, когда $y = 1$ или $y = 0$. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1$.

3.1. (***8 баллов***) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y^2 = z^3 \\ x^2 + y^3 = z^4 \\ x^3 + y^4 = z^5 \end{cases}$.

Ответ: (0; 0; 0); (0; 1; 1); (1; 0; 1); (–1; 0; –1); (–1; –1; 0); ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}$); ($\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

1) Если любые две переменные принимают нулевые значения, то значение третьей переменной также равно нулю, то есть $x = y = z = 0$ является решением данной системы.

2) Если $x = 0$, $y \neq 0$, то $\begin{cases} y^2 = z^3 \\ y^3 = z^4 \\ y^4 = z^5 \end{cases}$. Следовательно, $y > 0$, $z > 0$ и $y = z^{\frac{3}{2}} = z^{\frac{4}{3}} = z^{\frac{5}{4}}$, то есть $y = z = 1$.

3) Если $y = 0$, $x \neq 0$, то $\begin{cases} x = z^3 \\ x^2 = z^4 \\ x^3 = z^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z^3 \\ z^6 = z^4 \\ z^9 = z^5 \end{cases}$. Следовательно, $x = z = 1$ или $x = z = -1$.

4) Если $z = 0$, $y \neq 0$, то $\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ x^2 + y^3 = 0 \\ x^3 + y^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ y^4 + y^3 = 0 \\ -y^6 + y^4 = 0 \end{cases}$. Следовательно, $x = y = -1$.

5) Найдем ненулевые решения. Из второго уравнения системы следует, что $(x^2 + y^3)^2 = z^8$. Перемножим почленно первое и третье уравнение: $(x + y^2)(x^3 + y^4) = z^8$. Следовательно, $(x + y^2)(x^3 + y^4) = (x^2 + y^3)^2 \Leftrightarrow xy^4 + x^3y^2 = 2x^2y^3 \Leftrightarrow xy^2(x - y)^2 = 0$. Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $x = y$.

Тогда, $\begin{cases} x + x^2 = z^3 \\ x^2 + x^3 = z^4 \\ x^3 + x^4 = z^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x^2 = z^3 \\ x(x + x^2) = z^4 \\ x^2(x + x^2) = z^5 \end{cases}$. Учитывая, что $x \neq 0$, $z \neq 0$, получим, что $\begin{cases} x = z \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$.

Таким образом, $x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3.2. (***8 баллов***) Известно, что длина каждой биссектрисы треугольника не превосходит 1. Найдите наибольшее значение площади треугольника.

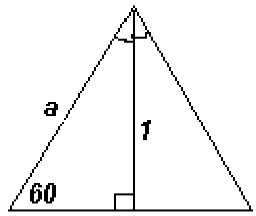
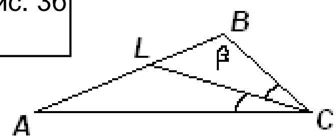


Рис. 3а

<u>Ответ</u>: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Это значение площади достигается, например, в равностороннем треугольнике с биссектрисой 1 (см. рис. 1).

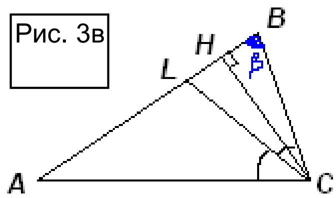
Рис. 3б



Действительно, в таком треугольнике биссектрисы совпадают с высотами, поэтому его сторона $a = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Докажем, что для всех треугольников, удовлетворяющих условию задачи, выполняется неравенство $S \le \frac{\sqrt{3}}{3}$. Для этого сначала докажем, что в таких треугольниках есть сторона, длина которой не больше, чем $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть это не так, и длина каждой стороны треугольника *ABC* больше, чем $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть *B* – наибольший угол этого треугольника, тогда проведем биссектрису треугольника *CL* (см. рис. 3 а, б). Возможны два случая:

Рис. 3в



1) если $\beta \ge 90°$, то в треугольнике *BCL* угол *B* – также наибольший (см. рис. 3б), поэтому $CL > BC > \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, что противоречит условию;

2) если $60° \le \beta < 90°$, то проведем высоту *CH* треугольника *ABC* (см. рис. 3в), тогда $CL \ge CH = BC\cdot\sin\beta > \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$, что также противоречит условию.

Таким образом доказано, что в данном треугольнике есть сторона *a*, длина которой не больше, чем $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда $h_a \le l_a \le 1$, поэтому площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ah_a \le \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1 \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.3. (***8 баллов***) Пятнадцать команд играют турнир в один круг (каждая встречается с каждой один раз). Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие до этого в сумме нечетное количество матчей.

Для каждого матча рассмотрим количество встреч, сыгранных ранее в сумме его участниками. Предположим, что все такие суммы – четные. Тогда, сложив их, получим четное число. Но каждая команда перед первой встречей имела 0 сыгранных матчей, перед второй встречей – 1 сыгранный матч, и так далее, перед последней встречей – 13 сыгранных матчей. Следовательно, для каждой команды сумма матчей, сыгранных перед каждой встречей, равна $\frac{(0+13)14}{2} = 7\cdot 13$. Так как в турнире участвует 15 команд, то общая сумма этих матчей равна 7×13×15, то есть нечетна. Получено противоречие, поэтому, в некотором матче встретятся команды, сыгравшие до этого в сумме нечетное количество матчей.

4.1. (***9 баллов***) Докажите, что если $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ и $a + b + c = 3$, то $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge ab+bc+ca$.

1) Докажем, что при любых $t > 0$ выполняется неравенство: $t^2+2\sqrt{t} \ge 3t$.

Это можно сделать различными способами, например, использовать неравенство о средних $\frac{m+n+p}{3} \ge \sqrt[3]{mnp}$ для $m = t^2$; $n = p = \sqrt{t}$ или ввести обозначение $\sqrt{t} = x$, исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x + 2$, где $x > 0$, на монотонность и экстремумы с помощью производной, и получить, что $f(x) \ge 0$.

2) Запишем доказанное неравенство для трех значений переменной $t = a$, $t = b$ и $t = c$ и сложим полученные неравенства. Получим: $a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c} \ge 3a+3b+3c \Leftrightarrow$ $2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \ge 3(a+b+c)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

3) По условию, $a + b + c = 3$, поэтому, $(a + b + c)^2 = 9 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) = 9 - 2(ab + bc + ca)$. Подставим эти значения в правую часть полученного неравенства, тогда $2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \ge 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge ab+bc+ca$, что и требовалось доказать.

4.2. (***9 баллов***) В тетраэдре $PABC$ высота, опущенная из вершины P, проходит через ортоцентр треугольника ABC. Найдите отношение площадей граней PAB и PAC, если $PC = 6 - \sqrt{2}$; $PB = 6 + \sqrt{2}$; $BC = 2\sqrt{19}$.

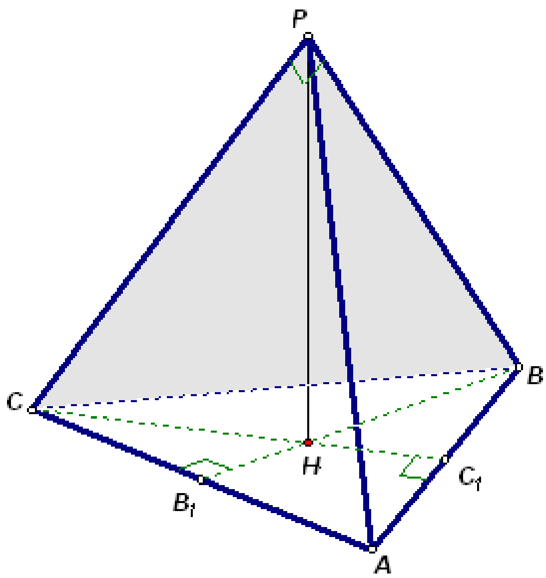


Рис. 4

<u>Ответ</u>: $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

Пусть $PABC$ – данный тетраэдр, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, H – ортоцентр этого треугольника (см. рис. 4).

Заметим, что $PB^2+PC^2 = \left(6+\sqrt{2}\right)^2+\left(6-\sqrt{2}\right)^2 = 76 = BC^2$, то есть треугольник PBC – прямоугольный ($\angle BPC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора).

Так как прямая CC_1 является ортогональной проекцией прямой PC на плоскость ABC и $CC_1 \perp AB$, то $PC \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Кроме того, по доказанному

PC⊥*PB*, поэтому *PC*⊥*APB* (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), следовательно, *PC*⊥*PA*. Аналогично доказывается, что *PA*⊥*PB*.

Таким образом треугольники *PAB* и *PAC* – прямоугольные (с прямыми углами при вершине *P*), тогда $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{PB}{PC}$.

Отметим, что тетраэдр, вершина которого ортогонально проектируется в ортоцентр противолежащей грани, называется ортоцентрическим. У него есть много интересных свойств, в частности, остальные его вершины также проектируются в ортоцентры противолежащих граней. В приведенном решении это свойство было доказано для случая, когда одна из граней тетраэдра – прямоугольный треугольник (ортоцентр прямоугольного треугольника – вершина прямого угла). Полученный тетраэдр является прямоугольным, то есть имеет три плоских прямых угла при одной из вершин. Прямоугольный тетраэдр является частным случаем ортоцентрического.

4.3. (***9 баллов***) Существует ли такое натуральное число *N*, что если приписать его к самому себе, то получится полный квадрат?

Ответ: как ни странно, существует.

$\overline{NN}$ = $N(10^k + 1)$, где k – количество цифр в десятичной записи числа *N*. Выберем значение k таким образом, чтобы число $10^k + 1$ делилось на квадрат натурального числа, отличного от 1. Например, рассмотрим число $10^{11} + 1 = (10 + 1)(10^{10} - 10^9 + ... - 10 + 1)$. Вторая скобка делится на 11, так как в ней 11 слагаемых, причем $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$ и $-10^{2n-1} \equiv 1 \pmod{11}$. Следовательно, рассматриваемое число делится на 11^2.

Пусть $10^{11} + 1 = 121x$, тогда возьмем *N*, равное $100x$. Получим, что $\overline{NN} = N(10^{11} + 1) = (11\times10\times x)^2$. Осталось доказать, что число *N* – одиннадцатизначное, то есть, что число x – девятизначное. Действительно, $x = \frac{10^{11}+1}{121} < \frac{121\cdot10^9}{121} = 10^9$ и $x = \frac{10^{11}+1}{121} > \frac{10^{11}+1}{10^3} > 10^8$.

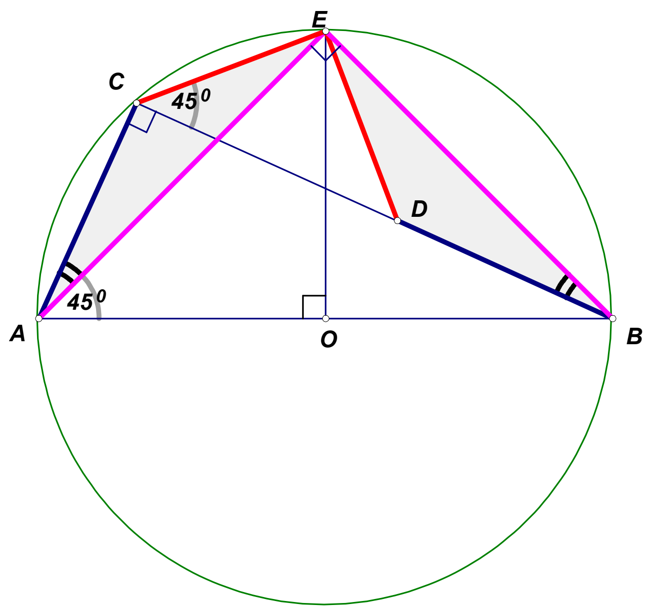
На самом деле: $10^{11} + 1 = 121\times826446281$, $N = 100\times826446281$, *то есть* $\overline{NN} = (10\times11\times826446281)^2$.

5.1. (***7 баллов***) Зная, что $\sin\alpha > 0$ и $\sin3\alpha > 0{,}25$, докажите, что $\sin\alpha > \frac{109}{1296}$.

Так как $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha > \frac{1}{4}$, то $3\sin\alpha > 4\sin^3\alpha + \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\sin\alpha > \frac{4}{3}\sin^3\alpha + \frac{1}{12}$. Учитывая, что $\sin\alpha > 0$, получим, что $\sin\alpha > \frac{1}{12}$. Тогда $\sin\alpha > \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{108}+1\right) = \frac{109}{1296}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что «лобовые» способы доказательства к успеху не приводят. Действительно, пусть $\sin\alpha = x > 0$. *Из условия следует, что* $3x - 4x^3 > \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $16x^3 - 12x + 1 < 0$. *Рассмотрим функцию* $f(x) = 16x^3 - 12x + 1$, *тогда* $f\left(\frac{108}{1296}\right) = f\left(\frac{1}{12}\right) > 0$, *а* $f\left(\frac{109}{1296}\right)$ *должно быть отрицательным. Таким образом, интересующее нас значение x, при котором f(x) = 0, лежит между числами* $\frac{108}{1296}$ *и* $\frac{109}{1296}$, *что не представляется возможным установить элементарными методами.*

5.2. (***7 баллов***) В окружность вписан прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*. На большем катете *BC* взята точка *D* так, что *AC* = *BD*. Найдите угол *DEC*, где *E* – середина дуги *AB*, содержащей точку *C*.



Ответ: $\angle DEC = 90°$.

Так как *E* – середина дуги *AB*, причем *AB* – диаметр окружности, то треугольник *AEB* – равнобедренный и прямоугольный, значит *AE* = *BE* и $\angle EAB = 45°$ (см. рис. 5).

Углы *CAE* и *DBE* равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу. Таким образом, треугольники *ECA* и *EDB* равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, *CE* = *DE*.

Так как $\angle ECB = \angle EAB = 45°$, то треугольник *CED* – равнобедренный с углом 45° при

Рис. 5

основании. Поэтому его угол при вершине *E* – прямой.

5.3. (***7 баллов***) На поверхности кубика Рубика в каждом из 54 квадратиков проведена одна диагональ. Могут ли эти диагонали образовывать замкнутую траекторию, не имеющую самопересечений? (Кубик Рубика представляет собой куб, составленный из 27 одинаковых кубиков.)

Ответ: нет, не могут.

Покрасим вершины квадратиков в белый и черный цвета в шахматном порядке. Тогда каждая диагональ квадратика соединяет две вершины одного цвета. Поэтому, если проведенные диагонали образуют замкнутую траекторию, то она проходит только через вершины одного цвета, например, белого. Среди вершин большого куба наверняка имеется белая (на самом деле белых – ровно половина). Она является концом проведенных диагоналей во всех трех примыкающих к ней квадратиках. Но тогда эти три диагонали не могут входить в траекторию, не имеющую самопересечений.