11 класс.

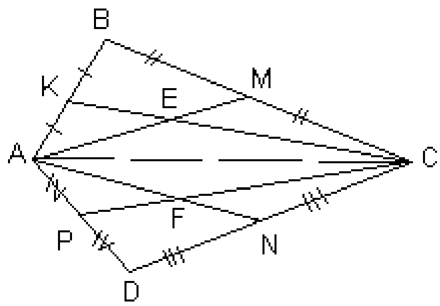
1.1. Решите уравнение: $2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$.

Ответ: (0; 0).

Удобнее записать уравнение так: $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y$. Тогда $2^{|x|} \ge 2^0 = 1$ и $\lg(1 + x^2 + |y|) \ge \lg 1 = 0$, то есть $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) \ge 1$. Так как $\cos y \le 1$, то исходное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = 1, \\ \cos y = 1 \end{cases}$, причем равенства достигаются тогда и только тогда, когда они достигаются во всех записанных неравенствах. Следовательно, $x = 0$; $y = 0$.

1.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точки *K*, *M*, *N* и *P* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Отрезки *AM* и *CK* пересекаются в точке *E*, а отрезки *AN* и *CP* – в точке *F*. Найдите площадь четырехугольника *AECF*, если площадь *ABCD* равна 12.

Ответ: 4.



Проведем диагональ *AC* данного четырехугольника (см. рис. 1). Тогда *E* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*. Так как медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников, то $S_{AEC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$.

Аналогично, так как *F* – точка пересечения медиан треугольника *ADC*, то $S_{AFC} = \frac{1}{3} S_{ADC}$. Таким образом, $S_{AECF} = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} + S_{ADC}\right) = \frac{1}{3} S_{ABCD}$ = 4.

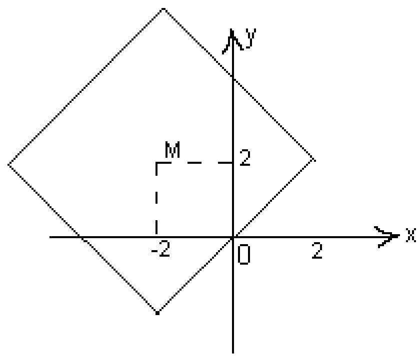
Рис. 1

1.3. Пусть *M* – наименьшее из четырех чисел: *a*, *b*, *c* и $1 - a - b - c$. Найдите наибольшее значение *M*.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пусть $d = 1 - a - b - c$, тогда из условия задачи следует, что $a + b + c + d = 1$. Предположим, что $M > \frac{1}{4}$, тогда каждое из данных чисел больше, чем $\frac{1}{4}$, следовательно, $a + b + c + d > 1$ – противоречие. Значение $M = \frac{1}{4}$ достигается, если $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

2.1. Найдите все значения k и b такие, что система уравнений $\begin{cases} y = kx + b \\ |x+2| + |y-2| = 4 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.



Ответ: (1; 0); (1; 8); (–1; –4); (–1; 4).

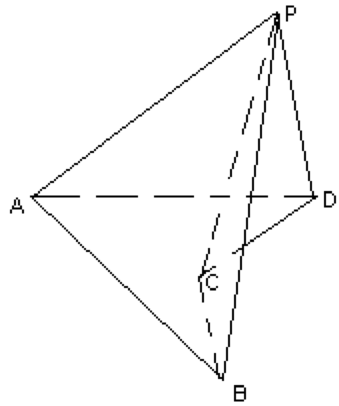
Уравнение $|x + 2| + |y - 2| = 4$ задает на координатной плоскости контур квадрата с центром $M(-2;\ 2)$ (см. рис. 2). Стороны этого квадрата принадлежат прямым, имеющим уравнения: $y = x$; $y = x + 8$; $y = -x - 4$; $y = -x + 4$.

Такие прямые имеют с границей построенного квадрата бесконечно много общих точек, а никакие другие прямые этим свойством не обладают. Таким образом, исходная система уравнений будет иметь бесконечно много решений тогда и только тогда, когда прямая $y = kx + b$ совпадет с одной из этих четырех прямых. Следовательно, $k = 1$; $b = 0$ или $k = 1$; $b = 8$ или $k = -1$; $b = -4$ или $k = -1$; $b = 4$.

Рис. 2

2.2. Существует ли невыпуклый многогранник, имеющий ровно пять вершин?

Ответ: да, существует.



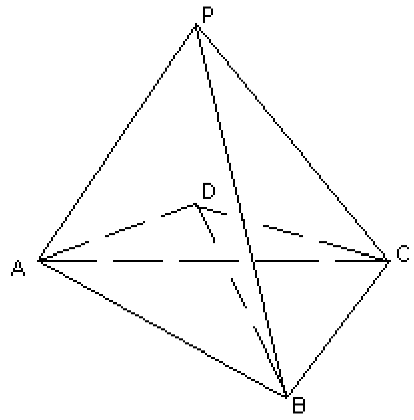
Например, пирамида *PABCD*, основанием которой является невыпуклый четырехугольник *ABCD* (см. рис. 3а), или многогранник *PABCD*, который получится, если из тетраэдра *PABC* «вырезать» тетраэдр *DABC* (см. рис. 3б).

Можно доказать, что многогранник, удовлетворяющий условию, либо имеет шесть треугольных граней, либо одну четырехугольную и четыре треугольных.

Рис. 3а

2.3. Докажите, что если числа m и $m^2 + 2$ – простые, то и число $m^3 + 2$ – также простое.

Первый способ. Если число m – простое, то оно либо равно 3, либо не делится на 3.

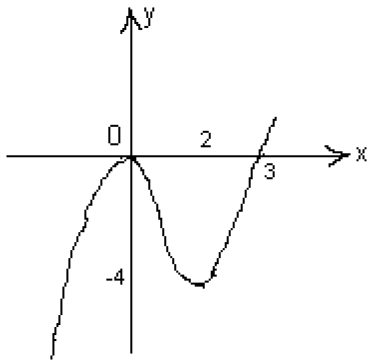


Если $m = 3$, то $m^2 + 2 = 11$, $m^3 + 2 = 29$, то есть эти числа – простые. Если число m не делится на 3, то остаток от его деления на 3 равен либо 1, либо 2. В обоих случаях остаток от деления числа m^2 на 3 равен 1, поэтому $m^2 + 2$ делится на 3. Так как это число – простое, то оно равно 3, тогда $m = 1$ – не простое, что противоречит условию задачи.

Второй способ. Если число m – простое и $m > 3$, то $m = 6k \pm 1$, где $k \in N$. Тогда $m^2 + 2 = 36k^2 \pm 12k + 3$, то есть $m^2 + 2$ делится на 3. Так как это число больше трех, то оно не является простым. Оставшиеся случаи: 1) если $m = 2$, то $m^2 + 2 = 6$ – не простое; 2) если $m = 3$, то $m^2 + 2 = 11$ – простое, тогда $m^3 + 2 = 29$ – также простое число.

Рис. 3б

Таким образом, условие задачи выполняется только для одного значения m. Для него выполняется и ее утверждение.



3.1. Докажите, что существуют различные действительные числа x, y и z такие, что $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + y + z$ таких чисел.

Ответ: 3.

Пусть $f(t) = t^3 - 3t^2$, тогда числа x, y и z – различные корни уравнения $f(t) = a$, где a – некоторое действительное число. Докажем, что это уравнение может иметь три различных действительных корня. Для этого исследуем функцию $f(t)$ на монотонность и экстремумы и построим эскиз ее графика.

Так как $f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t - 2)$, то $t = 0$ и $t = 2$ – критические точки функции; $f(0) = 0$; $f(2) = -4$. Учитывая изменения знака производной, получим эскиз графика (см. рис. 4). Поэтому при

Рис. 4

$a \in (-4; 0)$ уравнение имеет три действительных корня, что и требовалось доказать.

Тогда по теореме Виета сумма $x + y + z$ корней уравнения $t^3 - 3t^2 - a = 0$ равна 3.

Заметим, что значение суммы корней можно получить и не используя теоремы Виета для уравнения третьей степени. Достаточно записать равенство многочленов с *переменной t: $t^3 - 3t^2 - a = (t - x)(t - y)(t - z)$, раскрыть скобки в правой части и приравнять соответствующие коэффициенты.*

Отметим также, что ответ в задаче не изменится, если не требовать в условии, чтобы данные числа были действительными, поскольку теорема Виета справедлива и тогда, когда какие-то из корней – комплексные числа.

3.2. *AM* – биссектриса равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *AC*. Докажите, что если $\angle B = 100°$, то $AM + BM = AC$.

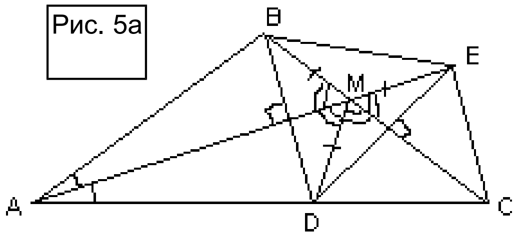
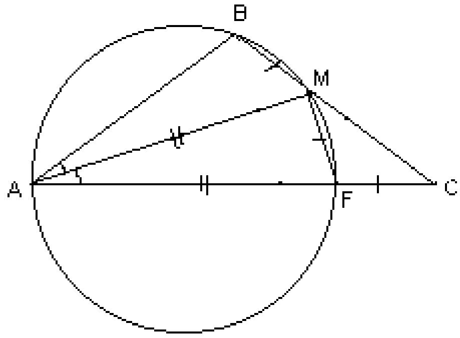


Рис. 5а

Первый способ. Из условия задачи следует, что $\angle BMA = \angle MCA + \angle MAC = 60°$. Отложим на продолжении биссектрисы *AM* отрезок *ME*, равный *BM*, и рассмотрим точку *D*, симметричную точке *B* относительно прямой *AM*, лежащую на основании *AC* (см. рис. 5а). Тогда $DM = BM = EM$ и $\angle DMA = \angle BMA = 60° = \angle DMC = \angle EMC$. Таким образом, *MC* – биссектриса $\angle DME$, поэтому углы *MCD* и *MCE* симметричны относительно прямой *MC*. Тогда в треугольнике *ACE*: $\angle ACE = 80° = \angle AEC$, то есть $AC = AE = AM + ME = AM + BM$, что и требовалось доказать.



Второй способ. На основании *AC* данного треугольника отметим точку *F* такую, что $AF = AM$ (см. рис. 5б). Тогда $\angle AFM = \angle AMF = 80°$. Так как $\angle ABM + \angle AFM = 180°$, то около четырехугольника *ABMF* можно описать окружность. Хорды *BM* и *MF* этой окружности равны, так как стягивают равные дуги. Кроме того, в треугольнике *MFC*: $\angle MFC = 100°$; $\angle MCF = 40°$, поэтому $\angle CMF = 40°$. Следовательно, $MF = FC$. Таким образом, $AM + BM = AM + MF = AF + FC = AC$, что и требовалось доказать.

Рис. 5б

3.3. Можно ли из каких-нибудь девяти выпуклых шестиугольников составить какой-нибудь выпуклый тридцатидевятиугольник?

Ответ: нет, нельзя.

Пусть это возможно, тогда, так как 39-угольник составлен из шестиугольников, то его углы составлены из углов этих шестиугольников. Следовательно, сумма углов 39-угольника не превосходит суммы углов девяти шестиугольников. Но если эти многоугольники – выпуклые, то первая сумма равна $180°\times 37$, а вторая сумма равна $(180°\times 4)\times 9 = 180°\times 36$.

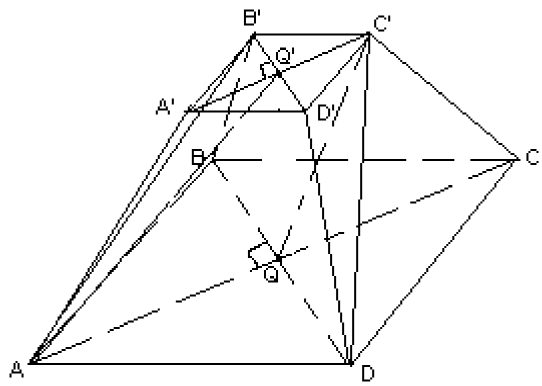
4.1. Решите уравнение: $2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3\cdot 16^{x^3}$.

Ответ: 2.

Заметим, что при $x < 0$ значение левой части больше, чем значение правой, поэтому данное уравнение не имеет отрицательных корней. Пусть $x \ge 0$, тогда запишем уравнение так: $2^{x^5} + 2^{2x^4} + 2^{32} = 3\cdot 2^{4x^3}$.

Для неотрицательных чисел справедливо неравенство: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$, причем равенство достигается при $a = b = c$. Воспользуемся этим дважды, тогда: $\frac{2^{x^5} + 2^{2x^4} + 2^{32}}{3} \ge \sqrt[3]{2^{x^5}\cdot 2^{2x^4}\cdot 2^{32}} = 2^{\frac{x^5+2x^4+32}{3}} \ge 2^{\sqrt[3]{x^5\cdot 2x^4\cdot 32}} = 2^{4x^3}$.

Таким образом, корнями уравнения являются те значения x, для которых в обоих случаях выполняются равенства. Следовательно, $x^5 = 2x^4 = 32 \Leftrightarrow x = 2$.



4.2. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований, а также сечение, проходящее через ребро нижнего основания и противолежащее ребро верхнего основания. Найдите угол между секущими плоскостями, если площади данных сечений равны.

<u>Ответ</u>: 60°.

Пусть $ABCDA'B'C'D'$ – данная усеченная пирамида; $AA'C'C$ и $AB'C'D$ – равновеликие сечения; φ – величина угла между их плоскостями (см. рис. 6). Проведем диагонали оснований, пересекающиеся в точках Q и Q'. Тогда ортогональной проекцией четырехугольника $AB'C'D$ на плоскость $AA'C'$ является четырехугольник $AQ'C'Q$. По теореме о площади ортогональной проекции многоугольника: $S_{AQ'C'Q} = S_{AB'C'D} \cdot \cos\varphi$. Кроме того, $S_{AQ'C'Q} = \frac{1}{2} S_{AA'C'C}$, так как высоты этих трапеций равны, а основания первой трапеции – в два раза меньше соответствующих оснований второй. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, то есть φ = 60°.

Рис. 6

Отметим, что «лобовые» способы вычисления искомого угла – весьма трудоемки.

4.3. На каждой половинке кости домино указано число очков – от 0 до некоторого N, большего 1. Все возможные пары чисел встречаются по одному разу (включая «дубли» – пары одинаковых чисел). Все кости домино выложены в цепочку, причем на прилегающих половинках соседних костей стоят одинаковые числа. Могут ли на концах цепочки стоять различные числа?

<u>Ответ</u>: нет, не могут.

Из условия задачи следует, что внутри цепочки числа должны стоять парами. Так как N > 1, то найдется число, не стоящее ни на одном из концов цепочки, то есть оно входит в цепочку четное количество раз. Кроме того, заметим, что все числа имеют одинаковое количество вхождений в цепочку, поэтому каждое из чисел входит в цепочку четное количество раз. Следовательно, если какое-то число стоит на одном конце цепочки, то оно же должно стоять и на другом конце.

Отметим, что каждое число входит в цепочку N + 2 раза. Так как N + 2 – четно, то и N – четно. Таким образом, если N > 1 и N – нечётно, то выложить в цепочку все кости домино невозможно.

5.1. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x – 4y + 24z$.

<u>Ответ</u>: 39.

Рассмотрим векторы: $\overline{m}$ (3x; 4y; 12z) и $\overline{n}$ (2; –1; 2) такие, что $\overline{m} \cdot \overline{n}$ = $6x – 4y + 24z$. Тогда $|\overline{m}| = \sqrt{9x^2 + 16y^2 + 144z^2} = 13$, $|\overline{n}| = 3$. Так как $\overline{m} \cdot \overline{n} \le |\overline{m}| \cdot |\overline{n}|$, то $6x – 4y + 24z \le 39$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\bar{m}\uparrow\uparrow\bar{n}$, то есть $\frac{3x}{2}=\frac{4y}{-1}=\frac{12z}{2}$ > 0 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=4z \\ y=-\frac{3}{2}z \\ z>0 \end{cases}$. Подставив выражения для *x* и *y* в данное равенство получим, что найденное значение достигается, если $x=\frac{26}{9}$; $y=-\frac{13}{12}$; $z=\frac{13}{18}$.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Данное уравнение задает в декартовой системе координат эллипсоид с центром О (0; 0; 0) (фигуру вращения эллипса вокруг одной из координатных осей). Из всех плоскостей вида 6*x* – 4*y* + 24*z = d, где d > 0, ищется та плоскость, которая имеет с эллипсоидом общие точки и наиболее удалена от начала координат. Это будет плоскость, касательная к эллипсоиду.*

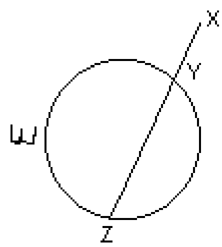
5.2. Одна окружность проходит через вершины *A* и *C* прямоугольника *ABCD*, другая – через вершины *B* и *D*. Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.

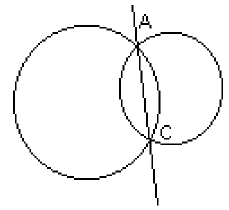
Решение этой задачи опирается на следующий факт. Пусть даны три окружности, которые пересекаются попарно, и существуют точки, принадлежащие всем трем кругам. Тогда три общие хорды этих окружностей пересекаются в одной точке (см. рис. 7а). Это утверждение можно доказывать различными способами.

Рис. 7а

<u>«Планиметрическое» доказательство</u>. Пусть дана окружность ω и точка *X*. Прямая, проходящая через точку *X*, пересекает окружность в точках *Y* и *Z* (см. рис. 7б). Тогда величина $XY \cdot XZ$ не зависит от выбора прямой (теорема о пересечении хорд окружности или теорема о произведении отрезка секущей и ее внешней части).

Эта величина называется степенью точки *X* относительно окружности ω *(если точка X лежит вне ω, то произведение берется со знаком «+», а если X – внутри ω, то со знаком «–»)*.

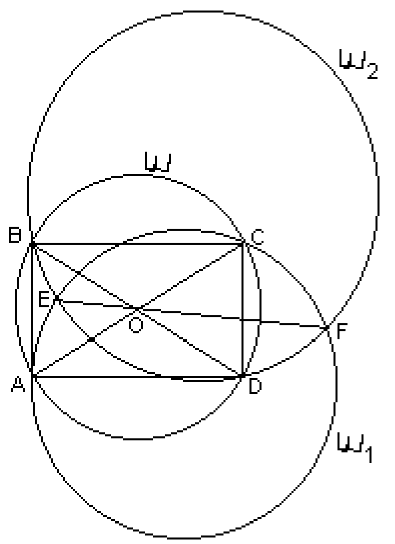


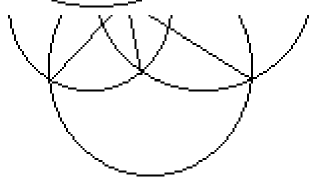


Пусть две окружности пересекаются в точках *A* и *C* (см. рис. 7в). Тогда прямая *AC* – геометрическое место точек плоскости, для которых степени относительно этих окружностей равны. (*Такую прямую называют радикальной осью этих окружностей*). Если три окружности пересекаются попарно, то радикальная ось первых двух окружностей пересекает радикальную ось второй и третьей окружности в точке, степень которой по отношению к первой и третьей окружностям одинакова. Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке.

Рис. 7б

Рис. 7в





«Стереометрическое» доказательство. Пусть данные окружности – проекции трех сфер на плоскость α, содержащую их центры (см. рис. 7а). Тогда их общие хорды – проекции окружностей, являющихся попарным пересечением сфер, на эту плоскость. Рассмотрим две точки, общие для трех сфер, которые симметричны относительно плоскости α. Их общая проекция на эту плоскость – точка пересечения трех хорд, что и требовалось доказать.

Докажем теперь утверждение задачи. Пусть окружность ω_1 проходит через точки A и C, а

Рис. 7г

окружность ω_2 проходит через точки B и D, EF – их общая хорда (см. рис. 7г). Построим окружность ω, описанную около прямоугольника $ABCD$. Тогда AC – общая хорда окружностей ω и ω_1, а BD – общая хорда окружностей ω и ω_2. По доказанному, прямые AC, BD и EF пересекаются в одной точке. В данном случае AC и BD пересекаются в центре O данного прямоугольника, поэтому хорда EF проходит через эту точку, что и требовалось доказать.

5.3. ╩¯ÙÞ¸Õ±_Ô¯ ´¯Ù³þ¯ÔÓ_ÕÙÕÚ ÞÝ_ÕÝÕ_Ó ¯±Ù¯ Ô _Õ¸ÕÝÞÕ Ô±ÕÒ¯ Ò¯õÓ. ¤Þ ²_¯ý ÝÓ ¸Õ_¹Õ ÓþÝ¹§ ÛÔÓ_ÓÙÓ (Õ ÛÓÛ¯ý-_ ´¯ õÛÕ) ´Þ°ÙÞ±³: ÝÓÞß¯Ù³°ÞÚ Óß±¯Ù■_Ý¹Ú ´Þ¯±_, ÝÕÞýÕÝ³°ÞÚ Óß±¯Ù■_Ý¹Ú прирост, ÝÓÞß¯Ù³°ÞÚ ¯_Ý¯±Þ_ÕÙ³Ý¹Ú прирост Þ ÝÕÞýÕÝ³°ÞÚ ¯_Ý¯±Þ_ÕÙ³Ý¹Ú прирост. (Абсолютный прирост – разность между новым и старым значением величины. Относительный прирост – это абсолютный прирост, делённый на старое значение.)

Известно, что нÓÞýÕÝ³°ÞÚ ¯_Ý¯±Þ_ÕÙ³Ý¹Ú ´Þ¯±_ ß¹Ù ÓÝ³°Õ, ¸Õý ÝÓÞß¯Ù³°ÞÚ ¯_Ý¯±Þ_ÕÙ³Ý¹Ú. ┬ ÛÓÛ¯ý ÛÔÓ_ÓÙÕ ß¹Ù ÝÕÞß¯Ù³°ÞÚ Óß±¯Ù■_Ý¹Ú ´Þ¯±_?

Ответ: в четвертом квартале.

Докажем, что если количество пользователей растет и относительный прирост увеличивается, то увеличивается и абсолютный прирост. Пусть A и B – количество пользователей в какие-то моменты времени, причем $A < B$, а абсолютный прирост составляет x и y человек соответственно. Тогда относительный прирост равен соответственно $\frac{x}{A}$ и $\frac{y}{B}$. Если $\frac{x}{A} < \frac{y}{B}$, то $Bx < Ay < By$, следовательно, $x < y$.

Таким образом, наибольший относительный прирост не мог быть ПОЗЖЕ, чем наибольший абсолютный, и потому был не позже третьего квартала. Аналогично, наименьший относительный прирост не мог быть РАНЬШЕ, чем наименьший абсолютный, и потому был не раньше второго квартала. Так как по условию задачи, наименьший относительный прирост был раньше, чем наибольший относительный, то они были во втором и третьем квартале соответственно. Следовательно, наибольший абсолютный прирост был позже, то есть в четвёртом квартале.

Доказать, что с ростом относительного прироста пользователей растет и их абсолютный прирост, можно, и не прибегая к выкладкам, например, так: количество пользователей растет, значит, если относительный прирост остается постоянным, то в следующем квартале он отсчитывается от большего значения, поэтому ему отвечает больший абсолютный прирост. Если же относительный прирост возрастает, то абсолютный прирост тем более возрастает.