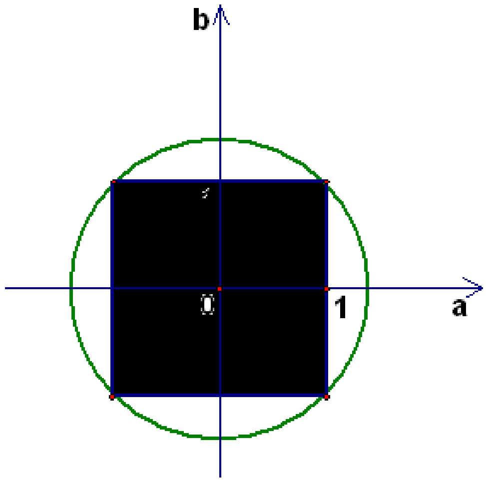
10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Известно, что $|a+b|+|a-b|\le 2$. Докажите, что $a^2+b^2\le 2$.

Первый способ. На координатной плоскости *aOb* неравенство $|a+b|+|a-b|\le 2$ задает квадрат с вершинами в точках (1; 1); (–1; 1); (–1; –1) (1; –1)*, а неравенство $a^2+b^2\le 2$ – круг с центром (0; 0) и радиусом $R = \sqrt{2}$ (см. рис. 1а).



Поскольку квадрат вписан в круг, то для всех (*a*; *b*), удовлетворяющих первому неравенству, выполняется и второе неравенство.

**График этого неравенства можно, например, получить, рассмотрев всевозможные комбинации знаков значений выражений a + b и a – b (четыре случая).*

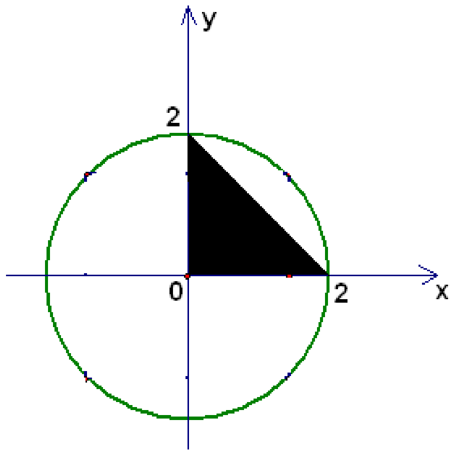
Рис. 1а

Второй способ. Так как $2 \ge |a+b|+|a-b| \ge |(a+b)+(a-b)| = 2|a|$, то $|a| \le 1$. Аналогично, $2 \ge |a+b|+|b-a| \ge |(a+b)+(b-a)| = 2|b|$, то есть $|b| \le 1$.

Тогда $a^2 \le 1$ и $b^2 \le 1$, следовательно, $a^2+b^2\le 2$.

Третий способ. Возведем обе части данного неравенства в квадрат: $|a+b|+|a-b|\le 2$ $\Leftrightarrow$ $(|a+b|+|a-b|)^2 \le 4$ $\Leftrightarrow$ $(a+b)^2+2|a+b|\cdot|a-b|+(a-b)^2\le 4$ $\Leftrightarrow$ $2a^2+2b^2+2|a^2-b^2|\le 4$ $\Rightarrow$ $a^2+b^2\le 2$.

Четвертый способ. Пусть $|a + b| = x \ge 0$; $|a - b| = y \ge 0$. Тогда



$a^2+b^2 = \dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} = \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Докажем, что при $x \ge 0$, $y \ge 0$ из неравенства $x + y \le 2$ следует неравенство $\dfrac{x^2+y^2}{2}\le 2$. Это можно сделать по-разному. Например,

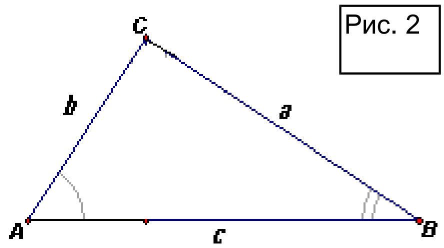
«От противного». Пусть это не так, тогда $\dfrac{x^2+y^2}{2}>2 \Leftrightarrow x^2+y^2>4 \Leftrightarrow (x+y)^2>4+2xy \Rightarrow$ $(x+y)^2>4 \Rightarrow x+y>2$ – противоречие.

Рис. 1б

«Графически». Система неравенств $\begin{cases} x+y\le 2 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$ задает на координатной плоскости треугольник с вершинами в точках (0; 0); (0; 2); (2; 0), который целиком принадлежит кругу с центром (0; 0) и радиусом R = 2. Этот круг является графиком доказываемого неравенства (см. рис. 1б).

1.2. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его сумма катетов равна 12, а сумма косинусов острых углов равна $\sqrt{2}$.

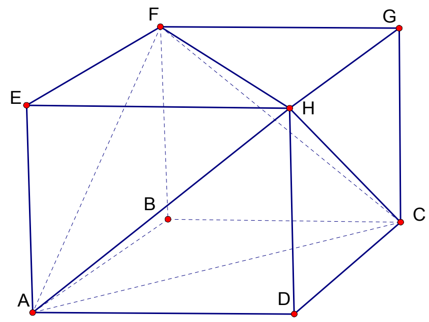
Рис. 2



Ответ: $6\sqrt{2}$.

Пусть C – вершина прямого угла треугольника ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (см. рис. 2).

Первый способ. Так как $a = c\cdot\cos\angle B$, $b = c\cdot\cos\angle A$, то $a + b = c\cdot(\cos\angle A + \cos\angle B)$. По



условию, $12 = c\sqrt{2}$, то есть $c = 6\sqrt{2}$.

Второй способ. Так как $\cos\angle A + \cos\angle B = \cos\angle A + \cos(90° - \angle A) = \cos\angle A + \sin\angle A = \sqrt{2}\sin(\angle A + 45^\circ) \le \sqrt{2}$, то равенство, указанное в условии, достигается т. и т. т., когда $\angle A = \angle B = 45°$. Тогда $a = b = 6$; $c = 6\sqrt{2}$.

1.3. Можно ли разрезать куб на пять треугольных пирамид?

Ответ: да, можно.

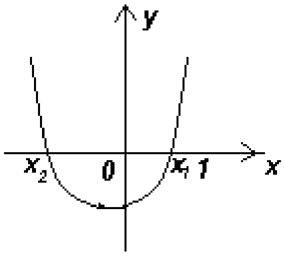
Рис. 3

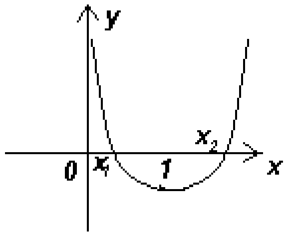
Пусть дан куб $ABCDEFGH$. Искомые пять пирамид – $DCAH$, $EAFH$, $BACF$, $GCFH$ и $FACH$ (см. рис. 3).

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка [0; 1], а другой – вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$.

<u>Ответ</u>: f(b) < 0.





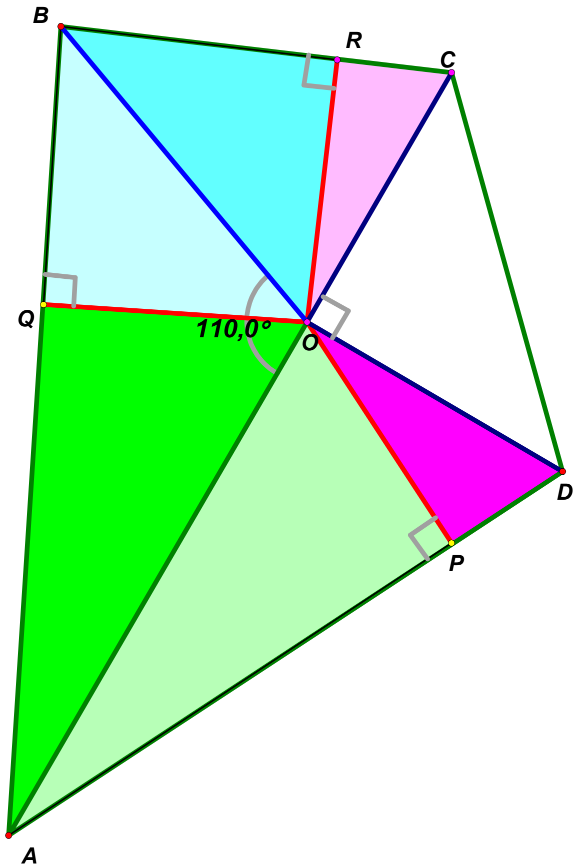
<u>Первый способ</u>. Заметим, что $f(b) = b^2 + ab + b = b(a + b + 1) = f(0)\cdot f(1)$. График данного трехчлена – парабола, ветви которой направлены вверх. Из условия задачи следует, что числа f(0) и f(1) имеют разные знаки (см. рис. 4 а, б). Следовательно, f(b) < 0.

<u>Второй способ</u>. График данного трехчлена – парабола, ветви которой направлены

Рис. 4а

Рис. 4б

вверх. Пусть $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \notin [0; 1]$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = b$, значит, $x_2 = \frac{b}{x_1}$. Тогда $|x_2| > |b|$. Учитывая, что $x_1 > 0$, рассмотрим два случая:



1) Если $x_2 < 0$, то $b = x_1 \cdot x_2 < 0$ и $x_2 < b$. Следовательно, $b \in (x_2; x_1)$, то есть f(b) < 0 (см. рис. 4а).

2) Если $x_2 > 1$, то $b = x_1 \cdot x_2 > 1$ и $x_2 > b$. Следовательно, $b \in (x_1; x_2)$, то есть f(b) < 0 (см. рис. 4б).

2.2. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка O так, что $OC = OD$ и $\angle COD = 90°$. Известно также, что $\angle AOB = 110°$ и точка O равноудалена от прямых DA, AB и BC. Найдите углы четырехугольника.

<u>Ответ</u>: $\angle A = 50°$; $\angle B = 90°$; $\angle C = \angle D = 110°$.

Пусть P, Q и R – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые DA, AB и BC соответственно (см. рис. 5). Тогда P и Q – внутренние точки сторон AD и AB соответственно, поскольку $\angle AOD = 90°$, $\angle AOB = 110°$.

По условию, $|OP| = |OQ| = |OR|$. Используя признак равенства прямоугольных

Рис. 5

треугольников по гипотенузе и катету, получим: $\Delta OPA = \Delta OQA$; $\Delta OQB = \Delta ORB$; $\Delta ORC = \Delta OPD$. Значит, при вершине O, помимо прямого угла COD, есть три пары равных углов, следовательно, $2\angle AOQ + 2\angle QOB + 2\angle ROC + \angle COD = 360°$. Учитывая, что $2\angle AOQ + 2\angle QOB = 2\angle AOB = 220°$, получим, что $\angle ROC = 25°$.

Отметим, что если точка R лежит на продолжении стороны BC, то $2\angle AOQ + 2\angle QOB = 2\angle AOB = 270°$, что противоречит условию.

Следовательно, $\angle RCO = \angle PDO = 65°$, тогда $\angle C = \angle D = 110°$; $\angle A = 2\angle PAO = 2\angle POD = 2\angle ROC = 50°$; $\angle B = 360° - (\angle A + \angle C + \angle D) = 90°$.

Подсчет углов можно провести иначе, если использовать, что точка O – центр окружности, касающейся прямых DA, AB и BC, то есть O – точка пересечения биссектрис углов A и B данного четырехугольника.

Пусть $\angle BAO = \angle DAO = \alpha$; $\angle ABO = \angle CBO = \beta$; $\angle BCO = \angle ADO = \gamma$. Тогда, используя теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника, составим систему уравнений: $\begin{cases} \alpha + \beta = 70^\circ \\ \beta + \gamma = 110^\circ \\ \gamma + \alpha = 70^\circ \end{cases}$. *Решив ее (проще всего способом сложения), получим:*

$\begin{cases} \alpha = 25^\circ \\ \beta = 45^\circ \\ \gamma = 65^\circ \end{cases}$ *Отсюда сразу следует ответ, приведенный выше.*

2.3. В верхнем углу таблицы 11×11 стоит число 1, а остальные клетки пусты. Сережа заполняет таблицу по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число x, то он ставит в любую соседнюю (по стороне) пустую клетку либо число $4x$, либо число $(x - 12)$, либо число $(x + 3)$. Сможет ли он добиться того, чтобы сумма всех чисел таблицы стала равной нулю?

Ответ: нет, не сможет.

Заполнение таблицы начинается с числа 1, и все числа, поставленные Сережей, имеют при делении на 3 остаток 1. Действительно, прибавление числа 3 или вычитание числа 12, очевидно, не меняет остатка от деления на 3, а поскольку $4x = x + 3x$, то и эта операция сохраняет остаток при делении на 3.

Следовательно, сумма S всех чисел таблицы имеет вид: $S = 3n + 121 = (3n + 120) + 1$, где $n \in Z$. Таким образом, число S также дает остаток 1 при делении на 3, то есть $S \neq 0$.

Третий тур (20 *минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Найдите наименьшее значение выражения $(x + y)(x + z)$, где x, y и z – положительные числа и $xyz(x + y + z) = 1$.

Ответ: 2.

Первый способ. Так как $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то $xyz(x + y + z) = 1 \Leftrightarrow yz(x^2 + xy + xz) = 1 \Leftrightarrow x^2 + xy + xz = \frac{1}{yz}$. Тогда $(x + y)(x + z) = x^2 + xy + xz + yz = yz + \frac{1}{yz} \geq 2$.

Равенство достигается, например, если $y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$.

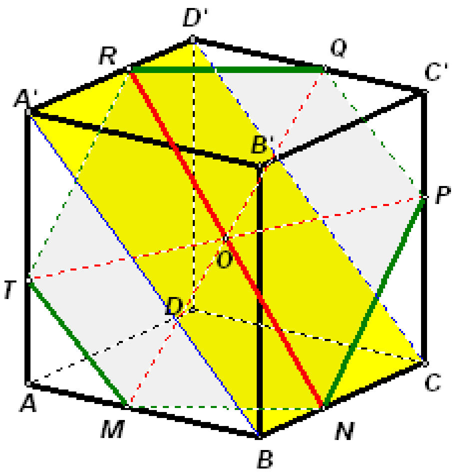
<u>Второй способ</u>. Пусть $\begin{cases} x+y=a>0 \\ y+z=b>0 \\ z+x=c>0 \end{cases}$, тогда $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}>0$. Равенство, заданное в условии задачи, примет вид: $\dfrac{a+c-b}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}\cdot\dfrac{b+c-a}{2}\cdot\dfrac{a+b+c}{2}=1$.

Докажем, что все сомножители в его левой части – положительные числа. Так как произведение и четвертый множитель положительны, то отрицательными могут быть только ровно два из первых трех множителей. Пусть, например, $\dfrac{a+c-b}{2}<0$ и $\dfrac{a+b-c}{2}<0$. Сложив эти неравенства почленно, получим, что *a* < 0 – противоречие. Аналогичный результат получится, если рассмотреть любую другую пару сомножителей.

Следовательно, существует треугольник со сторонами *a*, *b* и *c*. Найдем его площадь по формуле Герона: $S=\sqrt{\dfrac{a+b+c}{2}\cdot\dfrac{b+c-a}{2}\cdot\dfrac{c+a-b}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}}=1$.

С другой стороны: $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\angle C\le\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}(x+y)(y+z)$. Следовательно, (*x* + *y*)(*x* + *z*) ≥ 2. Указанные выше значения *y* = *z* = 1, *x* = $\sqrt{2}$ – 1 удовлетворяют условию задачи и обращают это неравенство в верное равенство.

3.2. Главные диагонали шестиугольного сечения куба пересекаются в одной точке. Обязательно ли это сечение проходит через центр куба?



<u>Ответ</u>: да, обязательно.

Рассмотрим куб *ABCDA*'*B*'*C*'*D*' и какое-нибудь его шестиугольное сечение *MNPQRT* (см. рис. 6). Предположим, что диагонали *RN, MQ* и *TP* шестиугольника пересекаются в некоторой точке *O*.

<u>Первый способ</u>. Заметим, что прямая *RN* лежит в плоскости диагонального сечения *BCA*'*D*', а прямая *MQ* – в плоскости сечения *ABC*'*D*'. Следовательно их общая точка *O* принадлежит *BD*' – прямой, по которой пересекаются указанные плоскости. Прямая *TP* лежит в плоскости сечения *ACC*'*A*', поэтому точка О должна являться пересечением *BD*' и этой плоскости. Таким образом, *O* – центр куба.

<u>Второй способ</u>. Противоположные стороны данного сечения попарно параллельны,

Рис. 6

так как принадлежат прямым пересечения плоскости сечения с противолежащими гранями куба. Следовательно, данное сечение разбивается диагоналями на три пары подобных треугольников: Δ*MON* ~ Δ*QOR*, Δ*NOP* ~ Δ*ROT*, Δ*POQ* ~ Δ*TOM*. Тогда $\dfrac{MN}{QR}=\dfrac{ON}{OR}=\dfrac{NP}{RT}=\dfrac{OP}{OT}=\dfrac{PQ}{TM}=\dfrac{OQ}{OM}=\dfrac{QR}{MN}$. Из равенства первого и последнего отношений получим, что *MN* = *QR*. Аналогично доказывается, что *NP* = *RT* и *PQ* = *TM*, то есть выписанные ранее пары треугольников не только подобны, но и равны. Тогда *O* – центр симметрии сечения.

Рассмотрим симметрию пространства с центром *O*. При этой симметрии образом точки *M* является точка *R*, поэтому образом прямой *AB*, проходящей через *M*, является ей параллельная прямая, проходящая через *R*, то есть прямая *C'D'*. Аналогично доказывается, что и остальные прямые, содержащие ребра куба, попарно симметричны относительно *O*. Таким образом, при симметрии с центром *O* куб переходит в себя, значит, точка *O* – центр симметрии куба (точка пересечения диагоналей).

Отметим, что во втором способе решения попутно доказан следующий факт: если противолежащие стороны шестиугольника попарно параллельны, а диагонали пересекаются в одной точке, то эта точка – центр симметрии шестиугольника.

3.3. Найдите все натуральные числа, которые в 11 раз больше суммы своих цифр.

Ответ: 198.

Пусть x – одно из искомых чисел, а y – сумма его цифр. По условию $x = 11y$, следовательно, x кратно 11.

Запишем полученное равенство по-другому: $x - y = 10y$. Так как числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 9, то число $10y$ кратно 9. Учитывая, что НОД (10; 9) = 1, получим, что y делится на 9, а значит и x делится на 9. Таким образом, искомое число кратно 99.

Если десятичная запись числа x содержит n разрядов, то $x \geq 10^{n-1}$, с другой стороны $x = 11y \leq 11\cdot 9n = 99n$. Следовательно, должно выполняться неравенство: $10^{n-1} \leq 99n$. Это справедливо только для трех натуральных значений n: 1; 2 или 3.

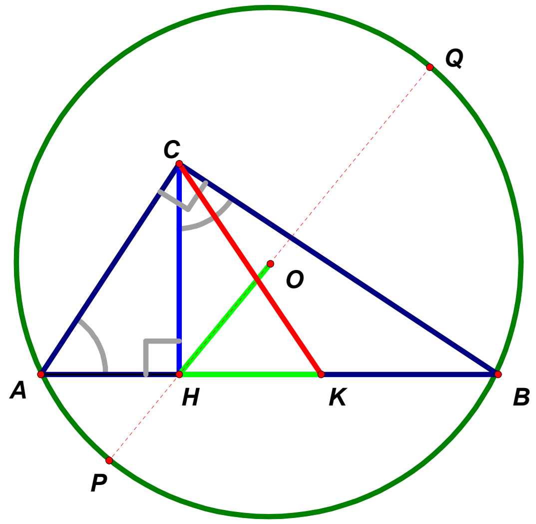
Таким образом, $x = 99p$, где p равно 1, 2 или 3. У всех таких x сумма цифр равна 18, поэтому легко проверить, что решением задачи является только число 198.

Четвертый тур (25 *минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Известно, что для положительных чисел a, b и c выполняется неравенство: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq a+b+c$. Докажите, что $a+b+c \geq 3abc$.

Для положительных чисел a, b и c неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq a+b+c$ равносильно неравенству $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq abc$. Поэтому достаточно доказать, что $\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$.

Это неравенство равносильно неравенству $(a + b + c)^2 \geq 3ab + 3bc + 3ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Последнее неравенство выполняется для любых значений переменных, так как оно, в свою очередь, равносильно верному неравенству $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

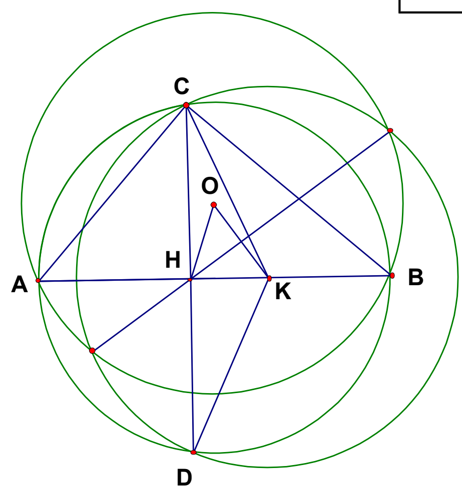


4.2. Вершина C прямого угла треугольника ABC лежит внутри окружности с центром O и радиусом R, проходящей через концы гипотенузы AB, CH – высота треугольника ABC. На прямой AB взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите CK.

Ответ: R.

Первый способ. Из прямоугольного треугольника CHK по теореме Пифагора получим: $CK^2 = CH^2 + KH^2$ (см. рис. 7а). Высота CH прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим проекций его катетов на гипотенузу, то есть $CH^2 = AH \cdot BH$.

Рис. 7а



Через точку H проведем диаметр окружности PQ. Тогда, по теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности: $AH \cdot BH = PH \cdot QH = (R - OH)(R + OH) = R^2 - OH^2$.

Учитывая, что $KH = OH$, получим: $CK^2 = AH \cdot BH + OH^2 = R^2 - OH^2 + OH^2 = R^2$.

Таким образом, $CK = R$.

Второй способ. Пусть D – образ точки C при симметрии относительно прямой AB (см. рис. 7б). Рассмотрим окружность ω_1, описанную около треугольника ABC, и окружность ω_2 с центром K и радиусом KC. Заметим, что точки C и D принадлежат обеим окружностям, то есть прямая CD является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2. Аналогично, прямая AB является радикальной осью данной окружности ω и окружности ω_1. Следовательно, общая точка H этих прямых является радикальным центром трех окружностей: ω, ω_1 и ω_2, то есть H принадлежит общей хорде окружностей ω и ω_2. Так как H равноудалена от центров O и K данных окружностей, то радиусы окружностей равны, следовательно, $CK = R$.

Рис. 7б

4.3. При каких натуральных значениях n числа $n^n + 1$ и $(2n)^{2n} + 1$ являются простыми одновременно?

Ответ: при $n = 1$ или $n = 2$.

При $n = 1$ оба данных числа являются простыми: $n^n + 1 = 2$; $(2n)^{2n} + 1 = 5$.

Пусть $n > 1$, тогда докажем, что n должно быть натуральной степенью числа 2. Пусть это не так, то есть $n = 2^k\cdot p$, где k – натуральное число или ноль, p – нечетное число, отличное от 1. Тогда $n^n + 1 = \left(2^k\cdot p\right)^{2^k\cdot p} + 1 = \left(\left(2^k\cdot p\right)^{2^k}\right)^p + 1$ делится на $\left(2^k\cdot p\right)^{2^k} + 1$ и не равно этому числу, поэтому является составным.

Таким образом, $n = 2^m$, где $m\in N$. Тогда $n^n + 1 = \left(2^m\right)^{2^m} + 1 = 2^{m\cdot 2^m} + 1 = \left(2^{2^m}\right)^m + 1$, а $(2n)^{2n} + 1 = \left(2^{m+1}\right)^{2^{m+1}} + 1 = 2^{(m+1)\cdot 2^{m+1}} + 1 = \left(2^{2^{m+1}}\right)^{m+1} + 1$.

Проведя рассуждения «от противного», аналогичные предыдущим (то есть предположив, что m или $m + 1$ имеют нечетный натуральный делитель, отличный от 1), получим, что рассматриваемые числа могут являться простыми только в том случае, когда оба числа m и $m + 1$ являются натуральными степенями числа 2.

Это возможно только при $m = 1$. Тогда оба данных числа действительно являются простыми: $n^n + 1 = 5$ и $(2n)^{2n} + 1 = 257$.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Существует ли такая функция f(t), где $t\in[-1; 1]$, что для всех $x\in[0; \pi]$ выполняется равенство f(cos$x$) = sin$x$?

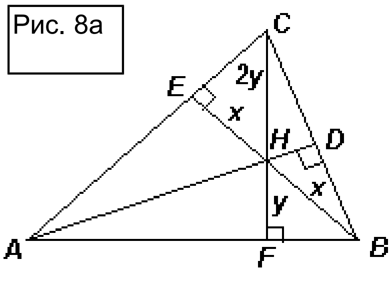
Ответ: да, существует.

Например, пусть $f(t)=\sqrt{1-t^2}$, тогда $f(\cos x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|=\sin x$, так как для всех $x\in[0; \pi]$ выполняется неравенство $\sin x \geq 0$.

5.2. Три высоты остроугольного треугольника пересекаются в точке H, которая делит одну из высот пополам, а другую в отношении 2 : 1, считая от вершины. В каком отношении точка H делит третью высоту?

Ответ: 5 : 1.

Рис. 8а



Первый способ. Пусть ABC – данный треугольник; AD, BE и CF – его высоты, $BH = HE = x$, $HF = y$, $CH = 2y$ (см. рис. 8а).

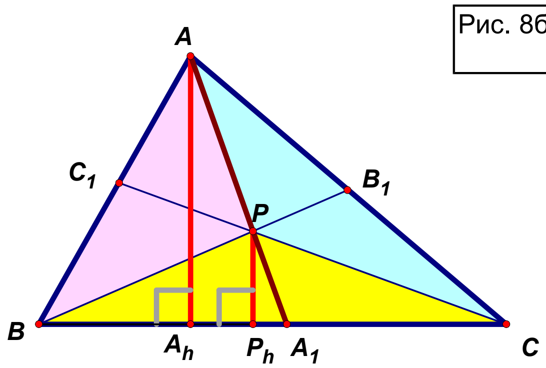
Так как $\angle BEC = \angle BFC = 90°$, то точки B, F, E и C лежат на одной окружности, поэтому $BH\cdot HE = CH\cdot HF$. Тогда $x^2 = 2y^2$, то есть $x = y\sqrt{2}$. Это означает, что треугольники

BHF и *CHE* – прямоугольные равнобедренные, значит *CE* = *x*; *BF* = *y*. Так как ∠*ABE* = 45°, то *AE* = 2*x*, следовательно, $AH=\sqrt{AE^2+HE^2}=x\sqrt{5}$.

Прямоугольные треугольники *ADC* и *AEH* подобны, поэтому $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AH}$. Следовательно, $AD=\frac{2x\cdot 3x}{x\sqrt{5}}=\frac{6x\sqrt{5}}{5}$. Таким образом, $\frac{AD}{AH}=\frac{6}{5}$, значит, $\frac{AH}{DH}=\frac{5}{1}$.

Вычислив отношения, в которых точки E и F делят стороны AC и AB, можно было также воспользоваться теоремой Ван – Обеля, которая в данном случае записывается так: $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AH}{HD}$.

Рис. 8б



<u>Второй способ</u>. Эта задача является частным случаем классического утверждения элементарной геометрии, которое называется теоремой Жергонна: «Если *P* – внутренняя точка треугольника *ABC*, а прямые *AP*, *BP* и *CP* пересекают противолежащие стороны в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, то $\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1$» (см. рис. 8б).

В нашем случае: треугольник *ABC* – остроугольный, значит, ортоцентр *H* – его внутренняя точка, $\frac{HA_1}{AA_1}=\frac{1}{2}$; $\frac{HB_1}{BB_1}=\frac{1}{3}$, поэтому $\frac{HC_1}{CC_1}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, тогда $\frac{CH}{HC_1}=\frac{5}{1}$.

Теорема Жергонна может быть доказана, например, так. Опустим перпендикуляры AA_h *и* PP_h *на сторону ВС. Тогда* $\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{PP_h}{AA_h}$ *(теорема Фалеса или подобие прямоугольных треугольников). С другой стороны,* $\frac{PP_h}{AA_h}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$, *так как эти треугольники имеют общее основание ВС. Следовательно,* $\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$. *Выразив аналогичным образом два других отношения, получим:* $\frac{PB_1}{BB_1}=\frac{S_{PAC}}{S_{ABC}}$ *и* $\frac{PC_1}{CC_1}=\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}$.

Следовательно, $\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=\frac{S_{PBC}+S_{PAC}+S_{PAB}}{S_{ABC}}=1.$

Ответ в задаче можно получить, не ссылаясь на теорему Жергонна. Достаточно провести рассуждения об отношении площадей из второй части доказательства теоремы.

Отметим, что теорема Жергонна обобщается для случая, когда точка P лежит вне треугольника. Для этого вводится понятие отношения длин направленных отрезков. Тогда теорема Жергонна записывается в единой для всех случаев форме:
$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{AA_1}}+\frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{BB_1}}+\frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{CC_1}}=1$.

5.3. На дискотеку пришло некоторое количество мальчиков и девочек, всего – не более 40 человек. Каждая девочка бросила взгляд на каждого знакомого мальчика, а каждый мальчик бросил взгляд на каждую незнакомую ему девочку. Всего было брошено 117 взглядов. Сколько мальчиков могло быть на этой дискотеке?

Ответ: мальчиков могло быть либо 9, либо 13.

Пусть на дискотеку пришли x мальчиков и y девочек. По условию $x + y \leq 40$. Рассмотрим произвольную пару, состоящую из мальчика и девочки. Если они знакомы, то в такой паре будет брошен взгляд девочки на мальчика, а если не знакомы, то будет брошен взгляд мальчика на девочку. То есть каждой паре соответствует ровно один взгляд. Общее количество таких пар (а значит, и взглядов) равно xy.

По условию $xy = 117$. Число 117 раскладывается на два натуральных множителя тремя способами: $117 = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13$. Так как сумма множителей должна быть не больше, чем 40, то возможен только последний вариант. Значит, $x = 9$ или $x = 13$.