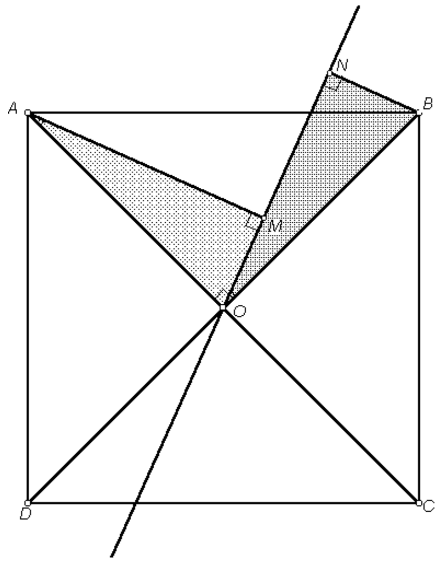
1.1. (***6 баллов***) Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет действительные корни?

Ответ: **верно**.

Дискриминант второго трехчлена: $D = b^6 - 4a^3c^3$. Если $ac \le 0$, то $-4a^3c^3 \ge 0$, то есть, $D \ge 0$. Если $ac > 0$, то рассмотрим первый трехчлен. Так как он имеет действительные корни, то $b^2 - 4ac \ge 0 \Leftrightarrow b^2 \ge 4ac \Leftrightarrow b^6 \ge 64a^3c^3$. Так как $ac > 0$, то $64a^3c^3 > 4a^3c^3$, следовательно, $b^6 > 4a^3c^3$, то есть, $D > 0$. Таким образом, второй трехчлен имеет действительные корни.

1.2. (***6 баллов***) Прямая проходит через центр квадрата со стороной 1. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до этой прямой.



Ответ: **1**.

Пусть O – центр квадрата $ABCD$. Рассмотрим перпендикуляры AM и BN к произвольной прямой, проходящей через точку O (см. рис. 1).

Так как $\angle MAO = 90° - \angle AOM = \angle NOB$ и $OA = OB$, то $\Delta OAM = \Delta OBN$, значит $OM = BN$. По теореме Пифагора: $AM^2 + BN^2 = AM^2 + OM^2 = AO^2 = \frac{1}{2}AB^2$. Учитывая, что O – центр симметрии квадрата, получим, что искомая сумма равна 1.

Другой способ решения. Пусть $\angle MAO = \angle NOB = \alpha$. Так как $AO = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $AM^2 + BN^2 = (AO \times \cos\alpha)^2 + (BO \times \sin\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0{,}5$.

Рис. 1

1.3. (***6 баллов***) Найдите две последние цифры в десятичной записи числа: 1! + 2! + ... + 2001! + 2002! (*Напомним, что $n! = 1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)n$.*)

Ответ: **1 и 3**.

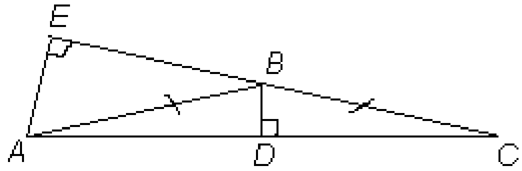
Рассмотрим последовательность $a_n = n!$ Все ее члены, начиная с a_5 оканчиваются нулем, а начиная с a_{10} – двумя нулями (при $n \ge 10$ число $n!$ содержит множители 2, 5 и 10). Поэтому, две последние цифры искомого числа совпадают с двумя последними цифрами суммы первых девяти членов последовательности, которые находятся непосредственным подсчетом: 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 + 362880 = ... 13.

2.1. (***7 баллов***) (a_n) – арифметическая прогрессия, $a_1 = 1$. S_{2002} – наибольшая среди всех S_n. Какие значения может принимать разность прогрессии?

Ответ: $\left(-\frac{1}{2001}; -\frac{1}{2002}\right)$.

Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то S_{2002} является наибольшей тогда, и только тогда, когда $\begin{cases} a_{2002} > 0, \\ a_{2003} < 0. \end{cases}$ В арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)\times d$, где d – разность прогрессии. В данном случае, $a_n = 1 + (n-1)\times d$, поэтому, $\begin{cases} 1 + 2001d > 0, \\ 1 + 2002d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2001} < d < -\frac{1}{2002}$.

2.2. (***7 баллов***) Верно ли, что если длина каждой высоты треугольника меньше 1, то его площадь меньше 1?



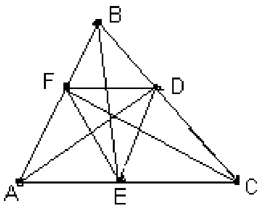
Ответ: **нет, не верно**.

Рис. 2

Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 8$ и высотой $BD = 0{,}5$ (см. рис. 2). $S_{ABC} = 0{,}5AC\times BD = 2$, а высоты, проведенные из вершин A и C, равны. Так как $BC > DC = 4$, то $AE = \frac{2S_{ABC}}{BC} < 1$.

2.3. (***7 баллов***) Изобразите 6 точек на плоскости так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.

Ответ: **например, см. рис. 3, где *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* – искомые точки**.



В том, что треугольников с вершинами в этих точках ровно 17, можно убедится непосредственным подсчетом.

Для того, чтобы найти искомое расположение точек, можно сначала подсчитать количество треугольников в случае, если никакие три из шести точек не лежат на одной прямой. Возможны различные способы подсчета, например, выписать все различные «тройки» точек, либо использовать формулу числа сочетаний: $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$. Для того, чтобы треугольников было на 3 меньше, необходимо чтобы ровно три «тройки» точек лежали на одной прямой. В приведенном примере: $F \in (AB)$; $E \in (AC)$; $D \in (BC)$.

Рис. 3

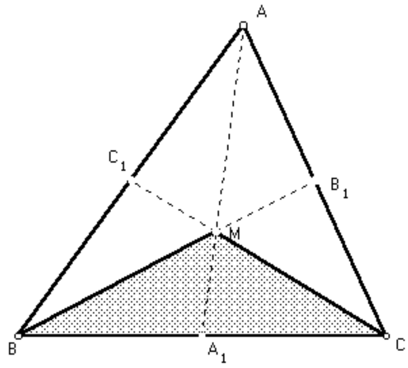
3.1. (***7 баллов***) Найдите наибольшее значение выражения $\sin x \times \cos y \times \cos z + \cos x \times \sin y \times \sin z$.

Ответ: **1**.

$\sin x \times \cos y \times \cos z \le |\sin x \times \cos y \times \cos z| = |\sin x| \times |\cos y \times \cos z| \le |\cos y \times \cos z|$, так как для всех x $|\sin x| \le 1$. Аналогично, так как $|\cos x| \le 1$, то $\cos x \times \sin y \times \sin z \le |\sin y \times \sin z|$. Сложим полученные неравенства: $\sin x \times \cos y \times \cos z + \cos x \times \sin y \times \sin z \le |\cos y \times \cos z| + |\sin y \times \sin z|$. Полученное в правой части выражение может быть равно одному из четырех выражений: $\pm\cos(y \pm z)$, каждое из которых не превосходит 1. Значение 1 данное выражение может принимать, например, при $x = 0$, $y = z = \frac{\pi}{2}$.

Возможны также аналогичные способы решения, использующие область значения выражений cos*y или* cos*z.*

3.2. (***7 баллов***) Верно ли, что если длина каждой медианы треугольника меньше 1, то его площадь меньше 1?



Ответ: **верно**.

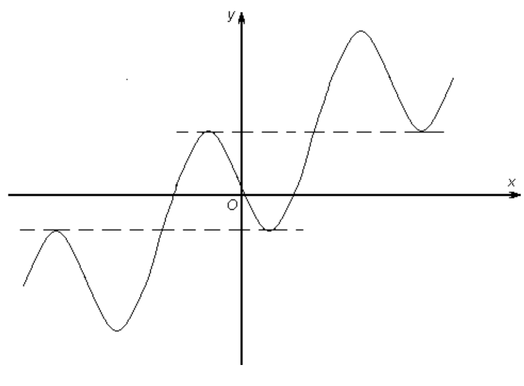
Рассмотрим ΔABC, в котором проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1, M – точка их пересечения (см. рис. 4). $S_{ABC} = 3S_{BMC}$ (так как у этих треугольников – общее основание BC, а отношение их высот, проведенных из вершин A и M, равно отношению $AA_1{:}MA_1 = 3{:}1$).

Так как площадь любого треугольника равна половине произведения двух сторон и синуса угла между ними, то она не превосходит половины произведения двух любых его сторон.

Рис. 4

Следовательно, если $BB_1 < 1$ и $CC_1 < 1$, то $S_{ABC} = 3S_{BMC} \le 3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}BB_1\right)\left(\frac{2}{3}CC_1\right) < \frac{2}{3}$

3.3. (***7 баллов***) Нарисуйте эскиз графика непрерывной функции, которая каждое действительное значение принимает ровно три раза.



Ответ: **например, см. рис**. **5** (значения функции в любых двух точках экстремума, между которыми находятся ровно две другие точки экстремума должно быть одинаковыми).

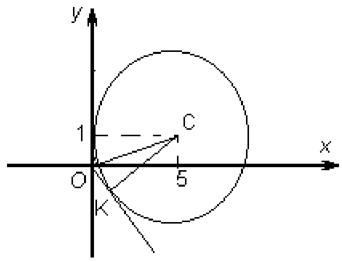
Рис. 5

4.1. (***8 баллов***) Найдите наименьшее значение выражения $\frac{y}{x}$, если известно, что $x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0$.

Ответ: $-2\frac{2}{5}$.

Рис. 6

<u>Первый способ</u>. Так как $x^2-10x+y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-1)^2=5^2$, то данное уравнение задает в координатной плоскости окружность с центром *C* (5; 1) и радиусом 5 (см. рис. 6). Для любой точки *K* этой окружности отношение $\frac{y}{x}$ задает тангенс угла α между положительным направлением оси абсцисс и лучом *OK*, причем, если точка *K* лежит в I координатной четверти, то $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а если *K* лежит в IV координатной четверти, то $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. В данном случае, тангенс принимает наименьшее значение, если (*OK*) – одна из касательных к окружности (см. рис. 6).



Координаты точки *K* можно находить различными способами, например: $OK^2 = OC^2 - CK^2 = (1^2 + 5^2) - 5^2 = 1$, поэтому точка *K* (*x*; *y*) лежит также на окружности с центром *O* (0; 0) и радиусом 1. (Этот же результат можно получить из равенства двух касательных к окружности, проведенных из точки *O*.)

Находим координаты точек пересечения двух окружностей: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2-10x+y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

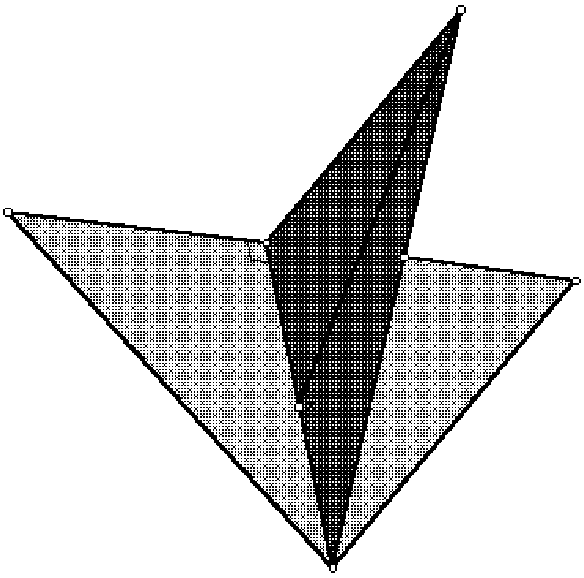
$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 10x+2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=1-5x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5}{13}, \\ y=-\frac{12}{13}. \end{cases} \end{array}\right.$ Так как *K* ($\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}$), то искомое отношение $\frac{y}{x}=-\frac{12}{5}$.

Можно также вычислить тангенс угла *KOX*, не находя координат точки *K*. Так как $\angle KOX = \angle COK - \angle COX$, $tg\angle COK=5$, $tg\angle COX=\frac{1}{5}$, то по формуле $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ получим, что $tg\angle KOX=\frac{12}{5}$. Учитывая, что *K* лежит в IV координатной четверти, получим, что искомое отношение $\frac{y}{x}=-\frac{12}{5}$.

<u>Второй способ</u>. Пусть $k=\frac{y}{x}$, тогда задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее значение *k,* при котором система уравнений $\begin{cases} y=kx, \\ x^2-10x+y^2-2y+1=0 \end{cases}$ имеет решение.

Подставим значение *y* во второе уравнение и преобразуем: $x^2-10x+k^2x^2-2kx+1=0$ $\Leftrightarrow$ $(1+k^2)x^2-2(5+k)x+1=0$. Рассматриваемая система уравнений имеет решения т. и т. т., когда имеет решения полученное квадратное уравнение, то есть, когда это уравнение имеет неотрицательный дискриминант. Значит, $(5+k)^2-(1+k^2)\ge 0 \Leftrightarrow 10k \ge -24 \Leftrightarrow k \ge -2{,}4$. Наименьшее значение *k*, удовлетворяющее этому условию, равно $-2\frac{2}{5}$.

4.2. (***8 баллов***) Проекциями некоторой фигуры на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются правильные треугольники. Могут ли они быть неравными?



Ответ: **да, могут**.

Рассмотрим, например, два правильных треугольника, лежащих в перпендикулярных плоскостях, причем высота одного из них является стороной другого (см. рис. 7). Искомой фигурой является объединение этих треугольников.

4.3. (***8 баллов***) Можно ли функцию $y = x^3$ представить в виде суммы четной и периодической функций?

Ответ: **нет, нельзя**.

Предположим, что представить можно, то есть, существуют функции f(x) – четная и g(x) – периодическая, такие что при всех значениях x выполняется равенство x^3 = f(x) + g(x).

Пусть T – период функции g(x). При $x = T$ равенство примет вид: T^3 = f(T) + g(T), а при $x = –T$: $–T^3$ = f($–T$) + g($–T$). Так как f($–T$) = f(T) и g($–T$) = g(0) = g(T), то получим, что $T^3 = –T^3$, то есть, $T = 0$, что невозможно.

Рис. 7

5.1. (***9 баллов***) Решите уравнение: $(2x + 2)(5 – 2x)(4x^2 + 8x + 11) = 10(2x + 3)^2$.

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Преобразуем данное уравнение: $(2x + 2)(5 – 2x)(4x^2 + 8x + 11) = 10(2x + 3)^2 \Leftrightarrow (–4x^2 + 6x + 10)(4x^2 + 8x + 11) = 10(2x + 3)^2$. Так как $x = –1,5$ не является корнем уравнения (проверяется подстановкой), то полученное уравнение равносильно уравнению $\frac{-4x^2+6x+10}{2x+3}\cdot\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=10.$

Пусть $\frac{-4x^2+6x+10}{2x+3}=y$, $\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=z$, тогда $y+z=\frac{14x+21}{2x+3}=7$. Таким образом,

$$\begin{cases} y\cdot z=10, \\ y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2, \\ z=5 \end{cases} \\ \begin{cases} y=5, \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

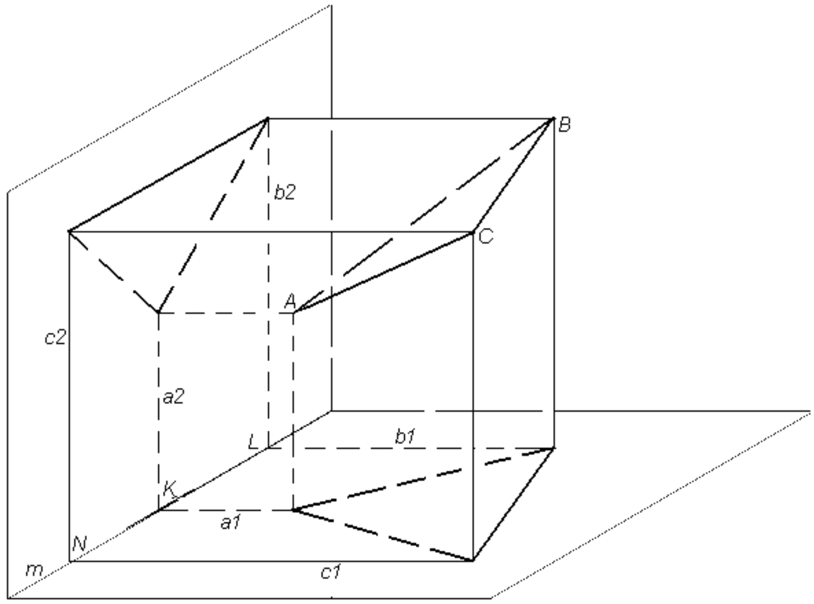
Далее, в каждой из полученных систем достаточно рассмотреть одно из уравнений.

1) $\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=5 \Leftrightarrow 2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$;

2) $\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+5=0$. Это квадратное уравнение не имеет корней.

5.2. (***9 баллов***) Проекциями некоторого треугольника на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются правильные треугольники. Могут ли они быть неравными?

Ответ: **нет, не могут**.



Пусть даны две перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по прямой *m*. Рассмотрим треугольник *ABC* и его проекции на эти плоскости (см. рис. 8). Через точки *A*, *B* и *C* проведем плоскости, перпендикулярные *m*, которые пересекут одну из данных плоскостей по прямым a_1, b_1 и c_1, а другую – по прямым a_2, b_2 и c_2 соответственно. *K*, *L* и *N* – точки пересечения этих прямых с прямой *m*. Так как каждая из рассматриваемых прямых перпендикулярна *m*, то $a_1||b_1||c_1$ и $a_2||b_2||c_2$. Расстояние между прямыми a_1 и b_1 равно длине отрезка *KL* и равно расстоянию между прямыми a_2 и b_2. Аналогично: расстояние между a_1 и c_1 равно расстоянию между a_2 и c_2; расстояние между b_1 и c_1 равно расстоянию между b_2 и c_2. Таким образом, исходная задача сводится к планиметрической.

Даны три параллельные прямые *a*, *b* и *c*. Существуют ли неравные правильные треугольники *ABC* такие, что $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$?

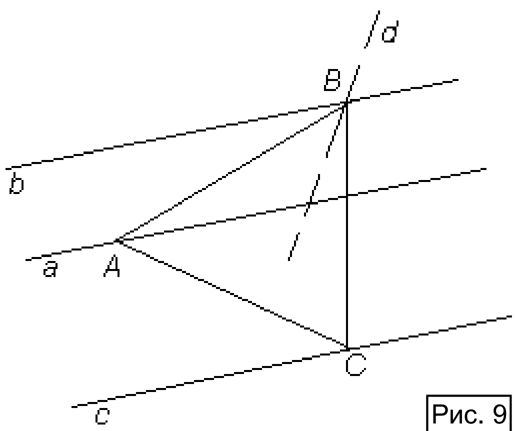


Рис. 9

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим задачу на построение правильного треугольника, вершины которого лежат на заданных параллельных прямых. Зафиксируем точку *A* на прямой a, и рассмотрим поворот плоскости вокруг точки *A* на угол $\varphi = 60°$ (см. рис. 9). При таком повороте образом вершины *C* служит вершина *B* и, так как $C\in c$, то $B\in d$ – образу прямой *c* при указанном повороте. Таким образом, искомая вершина *B* является пересечением прямых *b* и *d*, после чего однозначно определяется положение вершины *C*. Так как прямые *b* и *d* имеют одну общую точку, то, с точностью до ориентации вершин, существует единственный правильный треугольник с фиксированной вершиной A, удовлетворяющий условию (треугольник с вершиной A, ориентированный по другому, получится при рассмотрении поворота на угол $\varphi = -60°$). Остальные правильные треугольники, удовлетворяющие условию, получаются из них параллельным переносом вдоль прямой a, то есть, все такие треугольники равны. Значит, три параллельные прямые, лежащие в плоскости, задают правильный треугольник с фиксированной длиной стороны.

Следовательно, если проекциями какого-то треугольника являются правильные треугольники, то эти правильные треугольники равны.

Отметим, что планиметрическую часть доказательства можно осуществить и другими способами, не связанными с рассмотренной задачей на построение.

Утверждение данной задачи будет верным и в более общем случае, когда двугранный угол между данными плоскостями – произвольный, а треугольник проектируется параллельно сторонам его линейного угла.

5.3. (***9 баллов***) Найдите все натуральные решения системы уравнений: $\begin{cases} k^2 + p = n^2, \\ p^2 + k = m^2 \end{cases}$.

<u>Ответ</u>: **решений нет**.

Пусть существуют натуральные числа, удовлетворяющие данной системе уравнений, тогда $n > k$ и $m > p$. В натуральном ряду чисел после k^2 следующий полный квадрат равен $(k + 1)^2$, значит, $p = n^2 - k^2 \geq (k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$. Аналогично, $k = m^2 - p^2 \geq (p + 1)^2 - p^2 = 2p + 1$. Сложим неравенства $p \geq 2k + 1$ и $k \geq 2p + 1$ почленно: $p + k \geq 2k + 2p + 2 \Leftrightarrow p + k + 2 \leq 0$. Полученное неравенство не имеет натуральных решений.