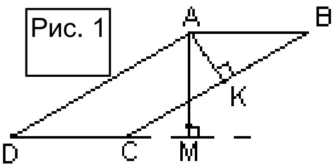
8 класс.

1.1. Докажите, что $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+....+\frac{1}{100}>1$.

Так как $\frac{1}{11}>\frac{1}{100}$, $\frac{1}{12}>\frac{1}{100}$, …, $\frac{1}{99}>\frac{1}{100}$, то $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}$ > $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{100}$ = $\frac{1}{10}+\frac{90}{100}=1$.

1.2. Из вершины *A* параллелограмма *ABCD* проведены высоты *AK* и *AM*. Может ли оказаться так, что точка *K* лежит на стороне параллелограмма, а точка *M* – на продолжении стороны?

Ответ: да, может (см. рис. 1).



Отметим, что в любом параллелограмме, не являющемся прямоугольником, основания высот, проведенных из вершины острого угла, лежат на продолжениях сторон, а основание одной из высот, проведенных из вершины тупого угла, может попасть на продолжение стороны параллелограмма, если угол между меньшей диагональю и одной из сторон – тупой.

1.3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы?

Ответ: да, существуют.

Приведем несколько примеров: 1) **48** = 3×**4**^{2}; **49** = **7**^{2}; **50** = 2×**5**^{2}; 2) **98** = 2×**7**^{2}, **99** = 11×**3**^{2}, **100** = **2**^{2}×**5**^{2}; 3) **124** = 31×**2**^{2}, **125** = **5**^{3}, **126** = 14×**3**^{2}.

Указанные «тройки» чисел – наименьшие из возможных.

2.1. Числа a, b, c и d таковы, что $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Верно ли, что $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$?

Ответ: верно.

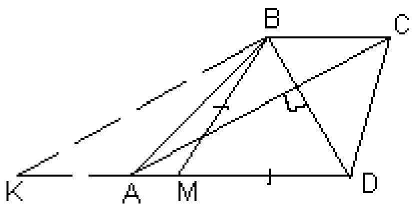
Если $a + b = c + d$, то $(a + b)^2 = (c + d)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$, откуда, учитывая что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, получим, что $ab = cd$.

Далее возможны различные способы, например:

1) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2) = (c + d)(c^2 – cd + d^2) = c^3 + d^3$.

2) Так как $a + b = c + d \Leftrightarrow (a + b)^3 = (c + d)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = c^3 + d^3 + 3cd(c + d)$, то $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

2.2. В трапеции *ABCD* диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны. На большем основании *AD* выбрана точка *M* так, что *BM* = *MD* = 3 см. Найдите длину средней линии трапеции.

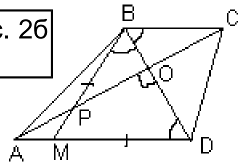


Ответ: 3 см.

Первый способ. Проведем прямую через вершину B, параллельную AC, которая пересечет прямую AD в точке K (см. рис. 2а). Тогда ΔKBD – прямоугольный, M лежит на его гипотенузе KD и равноудалена от вершин B и D, следовательно M – середина KD. Так как $BCAK$ – параллелограмм, то $BC = AK$. Следовательно, длина средней линии составляет половину длины KD, то есть, равна 3 см.

Рис. 2а

Рис. 2б



Второй способ. Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции; P – точка пересечения BM и AC (см. рис. 2б). По условию, ΔBMD – равнобедренный, значит, $\angle MBD = \angle MDB = \alpha$. Так как $\angle CBD = \angle MDB = \alpha$ и $BO \perp PC$, то BO – высота и биссектриса треугольника PBC, поэтому, этот треугольник – также равнобедренный, то есть, $BP = BC$.

Так как $\angle APM = \angle BPO = 90° - \alpha = \angle OAD$, то равнобедренным является и треугольник AMP: $AM = PM$. Таким образом, средняя линия трапеции равна:

$$\frac{AD+BC}{2} = \frac{AM+MD+BP}{2} = \frac{BM+MD}{2} = 3 \text{ (см)}.$$

2.3. В круговом турнире каждый участник встретился с каждым один раз (победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0). Единоличным победителем турнира стал Иванов. Затем за употребление допинга был дисквалифицирован Петров, результаты всех игр с его участием были аннулированы, и единоличным победителем оказался Сидоров. Петров утверждает, что если бы дисквалифицировали не его, а Сидорова, то он (Петров) стал бы единоличным победителем. Может ли это быть правдой?

Ответ: нет, не может.

До дисквалификации Петрова Иванов опережал Сидорова не менее чем на пол-очка, а после – уступил ему не менее, чем пол-очка. Следовательно, Иванов выиграл у Петрова. Так как после дисквалификации Сидоров опередил Иванова, то при пересчете Сидоров очков не терял, значит, Сидоров проиграл Петрову. Следовательно, при дисквалификации Сидорова Петров потеряет одно очко и опередить Иванова не сможет (даже если Иванов выиграл у Сидорова и также потеряет это очко).

3.1. Решите уравнение: $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0$.

Ответ: $x = 2$; $y = 1$.

Преобразуем данное уравнение: $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Так как каждое слагаемое в левой части принимает только неотрицательные значения, то полученное равенство выполняется тогда, и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю: $(y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$; $(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $(x - 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. При $x = 2$, $y = 1$, последнее равенство верно.

3.2. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны BC, точка N – середина стороны CD, P – точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что $\angle MAN = \angle BPM$.

Первый способ. Пусть K – середина стороны AB (см. рис. 3). Тогда, так как $BK \parallel ND$ и $BK = ND$, то $KBND$ – параллелограмм. Следовательно, $KD \parallel BN$, то есть, $\angle BPM = \angle KDM$.

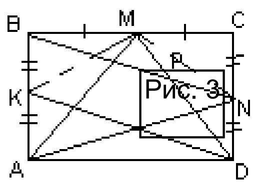


Рис. 3

Соединим точку M с точками N и K. Так как $\Delta KDM = \Delta NAM$ (по трем сторонам), то $\angle KDM = \angle MAN$. Следовательно, $\angle BPM = \angle MAN$, что и требовалось доказать.

<u>Второй способ</u>. Так как $AM = MD$ и $BC \parallel AD$, то $\angle MAD = \angle MDA = \angle DMC$ (см. рис. 3). Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников BCN и ADN следует, что $\angle NBM = \angle NAD$.

По теореме о внешнем угле для ΔBMP: $\angle BPM = \angle DMC - \angle NBM = \angle MAD - \angle NAD = \angle MAN$, что и требовалось доказать.

3.3. У Золотой рыбки записаны и перенумерованы подряд все знакомые. Половина из них – щуки, треть – окуни, а все знакомые с номерами, делящимися на 4, – караси. Сколько всего знакомых у Золотой рыбки?

<u>Ответ</u>: 6 знакомых.

<u>Первый способ</u>. Выпишем в ряд всех знакомых Золотой рыбки и разделим их на части, учитывая, что все знакомые с номерами, делящимися на 4, – караси (**К** – карась, **Р** – другая рыба):

Р Р Р К Р Р | Р К Р Р Р | К Р Р Р | К Р Р Р | К Р Р Р | ... (все части, начиная с третьей, – одинаковые, но в последней части может быть и менее четырех знакомых).

Тогда в первой части караси составляют $\frac{1}{6}$ от общего количества, во второй части – $\frac{1}{5}$, а в остальных – $\frac{1}{4}$ (в последней части может быть и больше, чем $\frac{1}{4}$). Из условия следует, что караси не могут составлять больше, чем $\frac{1}{6}$ от общего количества, поэтому, выписанный ряд должен ограничиться первой частью.

<u>Второй способ</u>. Из условия следует, что количество знакомых Золотой рыбки является числом вида $6n$, где n – натуральное; из них: $3n$ щук и $2n$ окуней, поэтому карасей – не больше, чем n.

Пусть k – количество карасей, тогда $6n = 4k + r$, где $0 \le k < 4$. Заметим, что $r \ne 0$, так как в противном случае караси составляли бы четвертую часть от всех знакомых, что невозможно, поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$. Кроме того, так как $6n$ – четное число, то $r \ne 1$ и $r \ne 3$. Следовательно, $r = 2$, то есть, $6n = 4k + 2 \Leftrightarrow 3n = 2k + 1 \Leftrightarrow n=\frac{2k+1}{3}$. Так как $n \ge k$, то $k \le 1$. При $k = 0$ число n не является целым, поэтому $k = 1$, тогда $n = 1$, то есть, $6n = 6$.

<u>Третий способ</u>. Заметим, что количество знакомых Золотой рыбки не может быть кратно четырем, так как $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$. Вместе с тем, оно должно быть чётным (так половина ее знакомых – щуки). Поэтому, количество ее знакомых должно быть числом вида $4k+2$, где k – натуральное число ($k \ne 0$, так как в этом случае общее количество знакомых равно двум, то есть, не кратно трем). Тогда количество щук равно $2k+1$, количество окуней – $\frac{4k+2}{3}$, а количество карасей – k.

Общее количество щук, карасей и окуней не превосходит общего количества знакомых, следовательно, $2k+1+\frac{4k+2}{3}+k \le 4k+2 \Leftrightarrow \frac{4k+2}{3} \le k+1 \Leftrightarrow 4k+2 \le 3k+3 \Leftrightarrow k \le 1$. Так как k – натуральное число, то $k=1$, то есть, общее количество знакомых равно $4\times1 + 2 = 6$.

4.1. Верно ли, что все корни уравнения $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c$, где a, b и c – данные натуральные числа, являются целыми числами?

<u>Ответ</u>: да, верно.

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)+\left(\frac{x-ca}{c+a}-b\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}+\frac{x-ca-cb-ab}{c+a}=0 \Leftrightarrow \left(x-(ab+bc+ca)\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=0.$$

Из условия следует, что второй множитель – положительное число, значит, x – (ab + bc + ca) = 0 ⇔ $x = ab + bc + ca$, то есть, x – целое число.

Эту же идею можно реализовать иначе: $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c$ ⇔

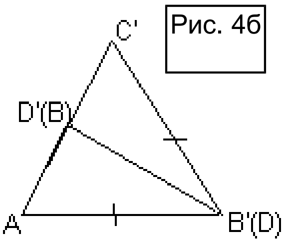
$$\frac{x}{a+b}-\frac{ab}{a+b}+\frac{x}{b+c}-\frac{bc}{b+c}+\frac{x}{c+a}-\frac{ca}{c+a}=a+b+c \quad\Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{b+c}+\frac{x}{c+a}=\left(a+\frac{bc}{b+c}\right)+\left(b+\frac{ca}{c+a}\right)+\left(c+\frac{ab}{a+b}\right) \quad\Leftrightarrow$$
$$x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \Rightarrow x = ab + bc + ca.$$

Отметим, что попытки непосредственного умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой части приводят к очень громоздким преобразованиям.

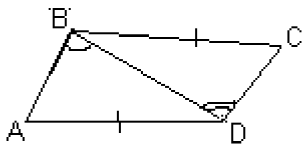
4.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

Рис. 4б

Рис. 4а



Разрежем данный четырехугольник по диагонали BD (см. рис. 4а) и, «перевернув» треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD (см. рис. 4б). Получился равнобедренный треугольник $AB'C'$ ($AB' = B'C'$). Следовательно $\angle B'AD' = \angle B'C'D'$, то есть, $\angle BAD = \angle BCD$, что и требовалось доказать.



Отметим, что выходя за рамки материала, уже изученного восьмиклассниками, можно предложить другой способ решения (см. рис. 4а).

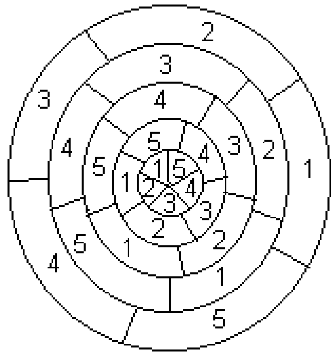
Пусть $\angle ABD = \alpha$, *тогда* $\angle CDB = 180° - \alpha$. *По теореме синусов из* ΔABD: $\frac{BD}{\sin\angle A}=\frac{AD}{\sin\alpha}$. *Аналогично, из* ΔBCD: $\frac{BD}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-\alpha)}$. *Учитывая, что* $AD = BC$ *и* $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, *получим, что* $\sin\angle A = \sin\angle C$.

Так как $\angle ABD + \angle CDB = 180°$, *то либо каждый из этих углов – прямой, либо один из них – острый, а другой – тупой. В первом случае ясно, что углы A и C – острые, поэтому, из равенства их синусов следует равенство углов.*

Во втором случае, без ограничения общности можно считать, что $\angle ABD = \alpha$ *– острый, а* $\angle CDB$ *– тупой. Тогда* $\angle C$ *– острый, следовательно, из* ΔBCD *получим, что* $BD < BC$. *Предположим, что* $\angle A$ *– не острый, тогда в* ΔABD: $\angle A > \alpha$, *то есть,* $BD > AD$. *Значит,* $BC > AD$, *что противоречит условию.*

Таким образом, $\angle A$ *– острый, поэтому* $\angle A = \angle C$, *что и требовалось доказать.*

4.3. Дан круг радиуса 10см. На одном из его радиусов отмечены пять точек: на расстояниях 1, 3, 5, 7 и 9 см от центра соответственно. Разрежьте этот круг на 5 равных частей так, чтобы в каждой части оказалась ровно одна точка.



Проведем четыре концентрические окружности с тем же центром и радиусами 2, 4, 6 и 8 см. Затем разрежем самый маленький круг и каждое из четырех полученных колец на 5 равных частей (см. рис. 5, «кусочки» одной части пронумерованы одинаково). Очевидно, что при таком разрезании существует радиус данного круга, пересекающий все полученные части, на котором и расположены данные точки.