1.1. Известно, что $a(1-b)>\frac{1}{4}$, где a и b – положительные числа. Какое из чисел больше: a или b?

Ответ: $a > b$.

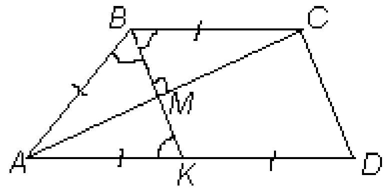
Так как $a > 0$, то из неравенства в условии следует, что $1 - b > 0$. Далее возможны различные способы.

Первый способ. Используем неравенство о средних: $\frac{a+(1-b)}{2} \geq \sqrt{a(1-b)} > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $a + (1 - b) > 1 \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

Второй способ. Из данного неравенства следует, что $a > \frac{1}{4(1-b)}$. Поэтому, $a-b>\frac{1}{4(1-b)}-b=\frac{1-4b+4b^2}{4(1-b)}=\frac{(1-2b)^2}{4(1-b)}\geq 0$, то есть, $a > b$.

Третий способ. Рассмотрим два случая: 1) $a \geq 1$, тогда $a \geq 1 > b$, то есть, $a > b$;
2) $0 < a < 1$, тогда $b > ab$, следовательно, $a - b > a - ab = a(1 - b) > \frac{1}{4}$, то есть, $a > b$.

1.2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$): $AB = BC = 0,5AD$. Найдите $\angle ACD$.



Ответ: 90^0.

Проведем в данной трапеции биссектрису угла ABC, которая пересечет диагональ AC в точке M, а основание AD – в точке K (см. рис. 1). Так как $\angle CBK = \angle AKB = \angle ABK$, то $AB = AK = KD = BC$, то есть, $BCDK$ – параллелограмм; ΔABC – равнобедренный, значит, $BM \perp AC$. Так как $CD \parallel BM$, то $CD \perp AC$.

Рис. 1

1.3. По кольцевой линии в одном направлении курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

Ответ: 3.

Так как время ожидания каждого трамвая должно уменьшиться на одну пятую, то оно составит $\frac{4}{5}$ от первоначального. Значит, за день мимо любой остановки должно проезжать в $\frac{5}{4}$ раз больше трамваев, то есть их должно стать 15.

Возможно и иное рассуждение. Остановим в какой-то момент все трамваи, тогда интервал между ними составит $\frac{1}{12}$ часть окружности. Уменьшение интервала движения на $\frac{1}{5}$ означает, что интервал между трамваями будет равен $\frac{1}{12}-\frac{1}{60}=\frac{1}{15}$ части окружности, то есть трамваев должно стать 15.

Хорошей моделью описываемой ситуации является циферблат часов, где первоначальное положение двенадцати трамваев соответствует положению чисел 0, 1, 2, ..., 11 (условный интервал движения – 5 минут), а новый интервал движения трамваев – 4 минуты.

2.1. Решите систему: $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz+zx \geq 0 \end{cases}$.

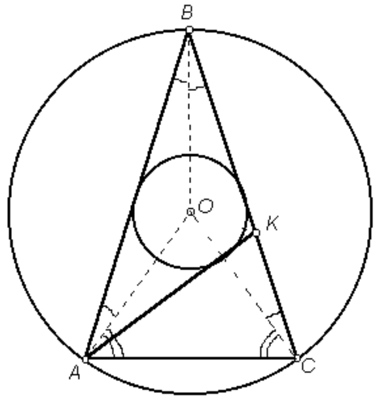
Ответ: $x = y = z = 0$.

Первый способ. Из уравнения системы следует, что $(x+y+z)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$. Так как неравенство $x^2+y^2+z^2 \geq 0$ верно при всех x, y и z, а неравенство $xy+yz+zx \geq 0$ выполняется по условию, то полученное равенство возможно т. и т. т., когда $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0, \\ xy+yz+zx=0 \end{cases}$, что достигается только при $x = y = z = 0$.

<u>Второй способ</u>. Из условия следует, что: $\begin{cases} -x = y+z, \\ x(y+z)+yz \ge 0. \end{cases}$ Следовательно, $yz \ge -x(y+z) = x^2$, значит, $2yz \ge x^2$. Из уравнения системы получим, что $x^2 = y^2 + 2yz + z^2$, тогда, $x^2 \ge y^2 + x^2 + z^2$, то есть, $y = z = 0$, значит, и $x = 0$.

2.2. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AK*. Известно, что совпадают центры двух окружностей: вписанной в ΔABK и описанной около ΔABC. Найдите углы треугольника *ABC*.

<u>Ответ</u>: $\angle A = \angle C = 72^\circ$; $\angle B = 36^\circ$.



Из условия следует, что центр *O* окружности описанной около ΔABC лежит внутри этого треугольника. Кроме того, так как *OA* = *OB* = *OC* и биссектриса угла *B* проходит через точку *O*, то $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \alpha$ и $\angle OAC = \angle OCA$ (см. рис. 2), значит, $\angle BAC = \angle BCA$, то есть, ΔABC – равнобедренный.

Так как *AK* – биссектриса $\angle BAC$, а *AO* – биссектриса $\angle BAK$, то $\angle BAC = \angle BCA = 4\alpha$; $\angle ABC = 2\alpha$; тогда $4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180 \Leftrightarrow \alpha = 18$.

2.3. Найдите все целые значения *m* такие, что выражение $\frac{2m+7}{5m+11}$ принимает целые значения.

Рис. 2

<u>Ответ</u>: *m* = –2.

<u>Первый способ</u>. Так как (5*m* + 11) – (2*m* + 7) = 3*m* + 4 ≥ 0 при $m \ge -\frac{4}{3}$, то целые значения *m,* большие –2, решением задачи не являются, так как числитель меньше знаменателя. При *m* = –2 данная дробь принимает целое значение 3. При *m* = –3 данная дробь принимает значение $-\frac{1}{4}$. При целых *m* ≤ –4 числитель и знаменатель данной дроби – отрицательны, значит, |5*m* + 11| – |2*m* + 7| = –5*m* – 11 + 2*m* + 7 = –3*m* – 4 > 0, то есть модуль числителя меньше модуля знаменателя, поэтому целых значений данная дробь принимать не может.

<u>Второй способ</u>. Данная дробь принимает целые значения, если модуль ее знаменателя равен 1 или ее можно сократить на выражение, равное модулю знаменателя.

|5*m* + 11| = 1 при *m* = –2 или *m* = –2,4∉Z. Выясним, при каких целых значениях *m* данная дробь сократима. Для этого, найдем наибольший общий делитель числителя и знаменателя с помощью алгоритма Евклида: НОД (5*m* + 11; 2*m* + 7) = НОД (2*m* + 7; *m* – 3) = НОД (*m* – 3; 13) = 13, если *m* – 3 кратно 13 (в остальных случаях НОД равен 1 и дробь – не сократима).

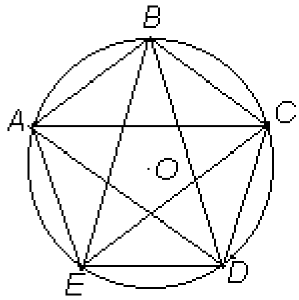
Таким образом данная дробь сократима тогда и только тогда, когда *m* = 13*k* + 3, где *k* – целое число. При найденных значениях *k* $\frac{2m+7}{5m+11} = \frac{26k+13}{65k+26} = \frac{13(2k+1)}{13(5k+2)} = \frac{2k+1}{5k+2}$. Так как |5k + 2| ≠ 1 ни при каких целых значениях *k*, то других целых *m*, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

3.1. Существуют ли такие числа *a*, *b*, *c*, *k*, *m*, *n*, *x*, *y* и *z*, что *amz* > 0; *bnx* > 0; *cky* > 0; *any* < 0; *bkz* < 0; *cmx* < 0?

<u>Ответ</u>: нет, не существуют.

Предположим, что такие *a*, *b*, *c*, *k*, *m*, *n*, *x*, *y* и *z* существуют, тогда произведение данных шести чисел: *amz*; *bnx*; *cky*; *any*; *bkz* и *cmx* отрицательно, так как среди них – три положительных и три отрицательных числа. Но это невозможно, так как это произведение равно $(abcmnpxyz)^2$, а значит оно – неотрицательно. Таким образом, исходное предположение неверно, и таких чисел не существует.

3.2. Расположите на плоскости 6 точек так, чтобы каждые три из них являлись вершинами равнобедренного треугольника. Ответ поясните.



Ответ: см. рис. 3.

Искомые точки *A, B, C, D, E, O* можно получить, например, следующим образом. Проведем произвольную окружность с центром *O* и разделим ее на 5 равных частей. Указанные точки – искомые, так как *OA* = *OB* = *OC* = *OD* = *OE* (радиусы окружности), *AB* = *BC* = *CD* = *DE* = *EA* и *AC* = *AD* = *BD* = *BE* = *CE* (в обоих случаях – хорды, стягивающие равные дуги).

Рис. 3

3.3. Играя с компьютером, Антон выиграл 60% партий. Отдохнув, он выиграл еще 10 партий подряд, и процент выигранных партий достиг 70%. Какое наименьшее количество партий он должен еще сыграть и сколько из них выиграть, чтобы в итоге количество выигранных партий опять составило 60%?

Ответ: 10 партий, из них две – выиграть.

Пусть сначала Антон сыграл с компьютером *n* партий, из которых выиграл – 0,6*n*. По условию, $\frac{0{,}6n+10}{n+10}=0{,}7$. Решением этого уравнения является *n* = 30, значит, на данный момент, Антон сыграл 40 партий, из которых выиграл 28.

Пусть он должен сыграть еще *x* партий, из которых выиграть – *y*. Тогда, по условию $\frac{28+y}{40+x}=0{,}6 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x-4=y$. Так как *x* и *y* – натуральные числа, то значение *x* должно быть кратно 5. При *x* = 5 y < 0, при *x* = 10 *y* = 2.

4.1. Найдите все положительные решения системы уравнений $\begin{cases} a+b=c^2, \\ b+c=d^2, \\ c+d=a^2, \\ d+a=b^2. \end{cases}$

Ответ: *a* = *b* = *c* = *d* = 2.

Первый способ. Вычитая из первого уравнения второе, из второго – третье, и т. д., получим, что: $a-c=c^2-d^2$ (1); $b-d=d^2-a^2$ (2); $c-a=a^2-b^2$ (3); $d-b=b^2-c^2$ (4).

Пусть $a \ge c$, тогда из (1) следует, что $c \ge d$, а из (3) следует, что $b \ge a$. Таким образом получим, что $b \ge a \ge c \ge d$. Но, если $b \ge d$, то из (2) следует, что $d \ge a$, а из (4) следует, что $c \ge b$, то есть $c \ge b \ge d \ge a$.

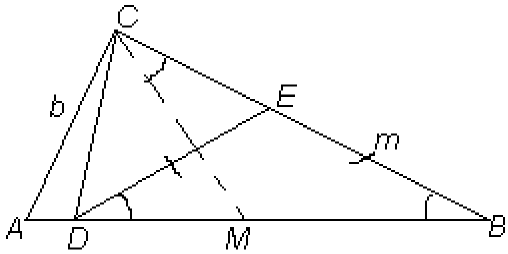
Таким образом, выполняются неравенства: $a \ge c$ и $c \ge a$, то есть, *c* = *a*. Тогда, из неравенства $c \ge b \ge d \ge a$ следует, что *a* = *b* = *c* = *d*, откуда подстановкой в любое из данных уравнений получаем ответ.

Случай, когда $a \le c$ рассматривается аналогично и приводит к тому же ответу.

Второй способ. Вычтем из первого уравнения третье и преобразуем: $c^2-a^2=(a-c)+(b-d)$ $\Leftrightarrow$ $(c-a)(c+a+1)=b-d$. Аналогично, вычитаем из второго уравнения четвертое: $d^2-b^2=(b-d)+(c-a)$ $\Leftrightarrow$ $(d-b)(d+b+1)=c-a$. Из полученных уравнений следует, что $(d-b)(d+b+1)(c+a+1)=b-d$.

Если $b \ne d$, то $(d+b+1)(c+a+1)=-1$, а это уравнение положительных решений не имеет. Следовательно, *b* = *d,* а тогда из полученных ранее уравнений следует, что *c* = *a.* Таким образом, в исходной системе первое уравнение совпадет с третьим, а второе – с четвертым. Тогда получаем: $\begin{cases} a+b=a^2, \\ b+a=b^2 \end{cases}$, то есть, *a* = *b*. Подставив этот результат в любое из уравнений, получаем ответ.

4.2. Меньший катет *AC* прямоугольного треугольника *ABC* имеет длину *b*. На гипотенузе *AB* выбрана такая точка *D*, что *BD* = *BC*. На катете *BC* взята такая точка *E*, что *DE* = *BE* = *m*. Найдите периметр четырехугольника *ADEC*.



Ответ: *2m* + *b*.

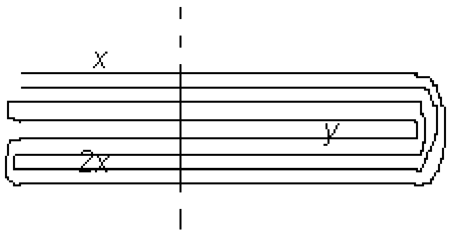
Пусть *M* – середина гипотенузы *AB* данного прямоугольного треугольника *ABC* (см. рис. 4). Тогда, *AM* = *BM* = *CM* и $\angle BDE = \angle MBC = \angle MCB$ (углы при основаниях двух равнобедренных треугольников). Так как *BD* = *BC*, то Δ *BDE* = Δ*BCM* (по стороне и двум прилежащим углам), следовательно, *CM* = *DE* = *m* и *CE* = *BC* – *BE* = *BD* – *BM* = *DM*. Тогда P_{ADEC} = *AD* + *DE* + *EC* + *CA* =

Рис. 4

AD + *m* + *DM* + *b* = *AM* + *b* + *m* = *2m* + *b*.

4.3. Веревку сложили пополам, потом еще раз пополам, потом снова пополам, а затем разрезали в каком-то месте. Какова может быть длина веревки, если известно, что какие-то два из получившихся кусков имеют длины 9 м и 4 м?

Ответ: 52 м или 68 м или 88 м.



При разрезании могут образоваться куски трех различных типов (см. рис. 5), причем длина одного из типов кусков ровно вдвое больше, чем другого. Обозначим эти длины: *x*, 2*x* и *y* соответственно, а длину всей веревки – *L*. Подсчитав количество кусков каждого типа, получим, что *L* = 8*x* + 4*y* = 4(2x + y). Все возможные, исходя из условия, варианты длин кусков представлены в таблице:

x	4	2	9	4,5
y	9	9	4	4
L	68	52	88	52

Рис. 5