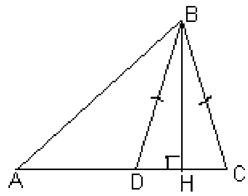
1.1. (**6 баллов**) Число 5 возвели в степень 2002. Как вы думаете, в получившемся числе больше, чем 2002 цифры или меньше? Ответ объясните.

Ответ: меньше. Оценить количество цифр числа 5^{2002} можно различными способами, например так: $5^{2002} = (5^4)^{500} \times 5^2 = 625^{500} \times 25 < 1000^{500} \times 25 = (10^3)^{500} \times 25 = 25 \times 10^{1500}$. Полученное число содержит 1502 цифры, следовательно, в десятичной записи числа 5^{2002} меньше, чем 2002 цифры.

1.2. (***6 баллов***) Две стороны и высота, проведенная к третьей стороне одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне другого треугольника. Можно ли утверждать, что треугольники равны? Ответ объясните.



Ответ: нет. Рассмотрим, например, остроугольный треугольник *ABC* (*AB* ≠ *BC*) и проведем его высоту *BH* (см. рис. 1). Пусть *CH* < *AH*, тогда на луче *HA* отметим точку *D* так, что *HD* = *HC*, и соединим ее с вершиной В. Из равенства треугольников *BHC* и *BHD* следует, что *BC* = *BD*. Таким образом, в треугольниках *ABC* и *ABD*: *BC* = *BD*, *AB* – общая сторона, *BH* – общая высота, проведенная к сторонам *AC* и *AD* соответственно. Эти треугольники не равны, так как один из них остроугольный, а другой – тупоугольный.

Рис. 1

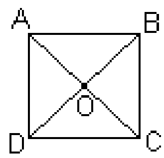
1.3. (***6 баллов***) Водитель дальнобойного грузовика взглянул на приборы своей машины и увидел, что спидометр показывает число 25952. «Какое красивое число километров я проехал. Наверное, не скоро выпадет следующее красивое число» – подумал он. Однако, через 1 час 20 минут на спидометре высветилось следующее красивое число. С какой скоростью ехал грузовик?

Ответ: 82,5 км/ч. Следующим красивым числом (то есть, числом-палиндромом) будет число 26062. Следовательно за 1 час 20 минут грузовик проехал 26062 – 25952 = 110 (км), значит его скорость равна $110 : \frac{4}{3} = 82{,}5$ (км/ч).

2.1. (***7 баллов***) Известно, что (*a* – *b* + 2002), (*b* – *c* + 2002) и (*c* – *a* + 2002) — три последовательных целых числа. Найдите эти числа.

Ответ: 2001, 2002 и 2003. Пусть *n* – 1; *n* и *n* + 1 – три последовательных целых числа, тогда их сумма равна 3*n*, то есть утроенному второму числу. Так как (a – b + 2002) + (b – c + 2002) + (c – a + 2002) = 6006, то *n* = 2002. Значит, *n* – 1 = 2001; *n* + 1 = 2003.

2.2. (***7 баллов***) Можно ли расположить на плоскости (но не на одной прямой!) пять точек так, чтобы выполнялось условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то этот треугольник – прямоугольный»? Ответ объясните.

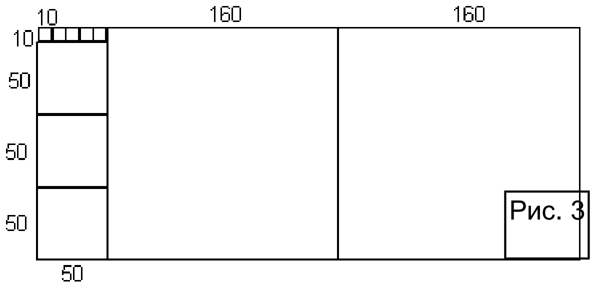


Ответ: можно. Пример такого расположения – вершины квадрата *ABCD* и точка *O* пересечения его диагоналей (см. рис. 2). Треугольники *AOB, BOC, COD, DOA, ABC, ADC, ABD* и *CBD* являются прямоугольными, а тройки точек *A, O, C* и *B, O, D* треугольников не образуют.

Можно доказать, что приведенное расположение точек – единственное, удовлетворяющее условию. Пять точек, лежащих на одной прямой, формально могли бы удовлетворять условию, так как в этом случае не образовывается ни одного треугольника.

Рис. 2

2.3. (**7 баллов**) Автомат умеет от любого картонного прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Петя разрезал имевшийся у него прямоугольник на 2 больших квадрата, 3 квадрата поменьше и 5 маленьких квадратов со стороной 10 см, используя только этот автомат. Найдите размеры Петиного прямоугольника.



Ответ: 370 см $\times$160 см (см. рис. 3). Эту задачу удобно решать «с конца». Пять квадратов со стороной 10 см могли быть получены только последовательным разрезанием прямоугольника 50$\times$10 (см). Так как этот прямоугольник, в свою очередь, был получен последовательным отрезанием трех одинаковых квадратов, то длина стороны каждого из этих квадратов – 50 см, а отрезались они от прямоугольника, большая сторона которого равна 10 + 50$\times$3 = 160 (см). Так как размеры этого прямоугольника 160 $\times$50 (см), то используя аналогичные рассуждения, получим, что длина стороны каждого из двух больших квадратов равна 160 см, что и составляет длину меньшей стороны исходного прямоугольника. Большая сторона этого прямоугольника равна 50 + 160$\times$2 = 370 (см).

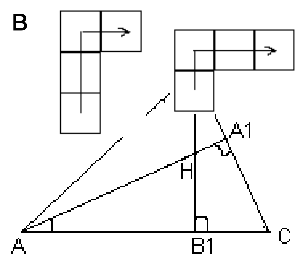
3.1. (***8 баллов***) Может ли натуральное число иметь в полтора раза больше нечетных делителей, чем четных? Ответ объясните.

Ответ: нет. Рассмотрим разложение натурального числа на простые множители. Если в этом разложении отсутствует множитель 2, то *все* делители этого числа – нечётные и ответ – очевиден. Пусть в разложении числа на простые множители есть хотя бы одна «двойка». Рассмотрим все нечётные делители этого числа. Если умножить на 2 каждый из них, то получится четный делитель этого же числа. Таким образом, если среди делителей числа есть хотя бы один чётный, то *чётных делителей*, по крайней мере, *не меньше, чем нечётных*. Следовательно, натуральное число не может иметь нечетных делителей в полтора раза больше, чем четных.

3.2. (***8 баллов***) В треугольнике ABC H – точка пересечения высот AA_1 и BB_1. Найдите $\angle BAC$, если известно, что $AH = BC$.

Ответ: 45°. Рассмотрим прямоугольные треугольники AB_1H и BB_1C (см. рис. 4): $AH = BC$ (по условию); $\angle HAC = 90° - \angle ACB = \angle B_1BC$, следовательно, эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольником получим, что $AB_1 = BB_1$, значит ΔABB_1 – прямоугольный и равнобедренный, то есть, $\angle BAC = \angle ABB_1 = 45°$.

3.3. (***8 баллов***) Шахматный конь хочет попасть из левого нижнего угла в правый верхний угол на доске размером 2002$\times$2003, делая ходы только вправо и вверх (см. рисунок). Сможет ли он это сделать? Ответ объясните.

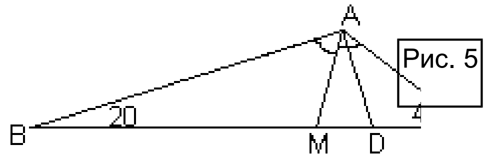


Ответ: не сможет. Для того, чтобы переместиться из левого нижнего угла доски в правый верхний конь должен пройти 2001 клетку вдоль меньшей стороны доски и 2002 клетки вдоль большей стороны. Таким образом, ему надо пройти 2001 + 2002 = 4003 клетки. Любой из двух разрешенных ходов приближает коня к цели ровно на три клетки. Так как 4003 не делится на 3, то попасть в правую верхнюю клетку конь не сможет.

4.1. (***9 баллов***) Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot218}-\underbrace{22\ldots2}_{218}$ является квадратом некоторого натурального числа.

$$\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot218}-\underbrace{22\ldots2}_{218}=\underbrace{100\ldots01}_{217}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218}-2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218}=\left(\underbrace{100\ldots01}_{217}-2\right)\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218}=\underbrace{99\ldots9}_{218}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218}=3\cdot\underbrace{33\ldots3}_{218}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218}=\underbrace{33\ldots}_{21}$$

4.2. (***9 баллов***) В треугольнике *ABC*: $\angle B$ = 20°, $\angle C$ = 40°, длина биссектрисы *AM* равна 2 см. Найдите разность сторон: *BC* – *AB*.



Ответ: 2 см. Рассмотрим данный треугольник ABC (см. рис. 5). Так как $\angle$BAC = 180° – (*20°* + 40°) = 120°, то $\angle$BAM = $\angle$CAM = 60°. На стороне BC отметим точку D такую, что BD = AB, тогда CD = BC – BD = BC – AB. В равнобедренном треугольнике BAD $\angle$BAD = $\angle$BDA = (180° – 20°) : 2 = 80°; $\angle$AMC – внешний для треугольника BAM, поэтому $\angle$AMC = 20° + 60° = 80°. Так как $\angle$BDA = $\angle$AMC, то ΔMAD – равнобедренный с основанием MD. $\angle$CAD = $\angle$BAC – $\angle$BAD = 120° – 80° = 40°, то есть $\angle$CAD = $\angle$DCA, значит ΔCAD – равнобедренный с основанием AC. Таким образом, CD = AD = AM = 2 (см).

4.3. (***9 баллов***) Дана последовательность, в которой пропущено ровно пять чисел: 102; 105; 111; 114; 120; 123; 129; ___; ___; ___; ___; ___; 201; 204; 210; 213; 219. Вставьте пропущенные числа.

Ответ: пропущены числа 141; 147; 159; 174; 186. Для того, чтобы восстановить пропущенные числа, необходимо заметить, что каждый член данной последовательности, начиная со второго, получается в результате сложения предыдущего члена и суммы его цифр: 111 = 105 + 6; 114 = 111 + 3; и т. д. Искомые числа: 141 = 129 + 12; 147 = 141 + 6; 159 = 147 + 12; 174 = 159 + 15; 186 = 174 + 12.